通識教育、科學教育與數學教育(下)
—自然中的理性

黃武雄

引言

在本文的上篇「理性的叛逆與解放」中, 我們以批判理論對科學的責難開始探討, 分析了法蘭克福學派霍克海默 (Horkheimer)、哈伯瑪斯 (Habermas) 及馬庫色 (Marcuse) 等人的論點。他們所提出「科學訓練在培養人的工具理性、技術意識等」的指證, 應引起科技社群的反省。尤其馬庫色批評科技本身在維護現體制, 變成統治階級的共犯, 這類觀點值得科技社群警覺。

物理學家戴森 (Freeman Dyson) 亦指出 [1] 科學有美醜的兩個面向。上篇接近末尾時, 我引述過他的一段分析, 現在我把他這段分析, 用來作爲今天這個報告的起點。他寫道:

> 科學是六面山, 有醜陋的三面: 僵化而威權的紀律與企業及營利目的掛勾, 又幫忙在製造集體殺人的武器, 另外也有美麗的三面: 對威權的顚覆有藝術一般的容顏及跨過國界、人類一家, 我們不能欺騙年輕的一代, 假裝科學沒有這些醜陋的面向。但我們也要引領青年人看到美麗的面向, 然後賦與他們完全的自由, 任他們自己去探察它的美麗與醜陋。

一、數學中的六面山

數學也有美醜的兩種面向。作爲科學的一個分支, 或所謂的科學之母, 許多人都把數學當做科學的工具來看待, 如果科學不能從資本主義社會或國家主義的工具化角色中掙脫出來, 那麼數學便也淪爲工具的工具:

$$數學 = (工具)^2。$$

這點也許是一些較有反省力或自主性的數學家, 不斷以數學的思考訓練重於工具訓練, 來對抗純實用性數學的背景原因。

但在強調數學思考訓練的同時, 我們則看到部份數學家自絕於外界, 只在思維世界裡營造其抽象體系, 建立主觀「結構」卻漠視「現象」。這帶來了一些數學工作及工作者

本身的封閉性。二十世紀中期以二次大戰之後富裕的美國社會爲物質基礎, 數學的形式主義風行一時, 造就了許多封閉的數學研究領域。這些領域隨著越戰的拖延而停滯。

數學的封閉性和它不必回到現象界去觀照自身的價值有關。同時這也是不完全的數學教育所造成的結果, 有些領域的數學研究由於分工的需要, 不免要在結構中專注, 但數學教育應讓學生明瞭問題的起源, 明瞭所研究的題材在整個探討過程中的位置。

除了工具化與封閉性之外, 數學的專斷性也是數學訓練常在不自覺中衍生的產物。康得 (Immanual Kant) 在寫「純粹理性批判」[2] 時, 想要找尋絕對的眞理作爲先驗的理性。他所提出的絕對眞理便是歐幾里得幾何: 他認爲三角形內角和等於一百八十度的這種幾何是絕對的 (the Absolute Geometry)。

換句話說, 許多時候人想要找到絕對的眞理, 便在數學中去找尋, 例如一加一等於二, 或像康德所指出的歐氏幾何。但這些都不是絕對的眞理, 而是相對於所處的系統。歐氏幾何到十九世紀也因 Lobatshevky、John Bolyai及 Gauss 所分別建立的雙曲幾何[3], 而從兩千年來被尊崇爲唯一的絕對幾何的王位退讓下來。

長年陷在數學結構與計算的訓練與研究, 如果未能認識數學結構與現象之間的關聯, 而能有較整體的了解, 如果未能認識數學作爲文明的一支, 應放回科學與人類社會去做全面觀照, 那麼數學將呈現三個醜陋面:

工具理性的工具, 封閉性與專斷性

就如 Freeman Dyson 所說, 我們應該也引領年輕的一代看到數學美麗的三面。這美麗的三面將造就出一種帶著數學特質的自由心智, 或許這才是數學教育最可貴的面向。

數學工作的一個重要面向, 是做 本質的探討。對於自然的原理或語言, 數學家的態度與任務是尋找基本的結構與普遍的方法, 也因此可以深入理則世界的本質。好的數學家不會因爲一個特殊問題的具體應用得到解答而滿足的停止了其本質的探討。同時他也不會完全漠視現象與直覺, 而在純粹主觀思維與演繹體系中, 留連忘返。本質並不是與現象斷裂的東西, 而是從屬於衆多現象, 進一步加以一般化的結構與方法。

在理則世界中從事本質探討, 也許是數學家特有的偏好。本質探討也容易使人從傳統價值或現實權威中解放出來。透過直接觀察現象, 建立事實, 而進入理則世界的本質, 可以使人超越世俗的價值, 自理性的信仰中去否定現世的權威。數學訓練可以促發少年期的理性叛逆, 對於青年期的解放, 有一定的作用。一個意氣風發的少年, 隨著數學的引導, 進入理則世界的本質探討, 由於理性的嚴謹與純淨, 他會肯定獨立思考的內在價值, 從而由根本質疑世俗的傳統規範與權威。比起其他學科, 數學更容易使年輕人自然養成「吾愛吾師, 吾更愛眞理」的態度。這種態度使新生的一代更容易超越上一代, 使世界更容易更新。懷疑主義在堅實的理性基礎上將啓發更多的自由性靈與知識良心。六〇年代的反戰運動, 曾因羅素等人注入的懷疑主義而愈趨深刻, 因 Stephen Smale 與 Robinson 的理性直覺而更波瀾壯闊。

雖然從現世的權威中解放, 其實也近似於 Freeman Dyson 所指出的顚覆威權。但在數學的領域裡, 解放的功能會比自一般物質科學中啓蒙的效果更爲徹底, 這是因爲數學不直接依賴於物質世界。當一個人在思考「負負得正」的普遍理性, 思考「複數結構相對於實數結構的完整」與自我滿足, 思考「過線外一點可以有無窮多條平行線」的幾何本質時, 他更能把自我溶入理性之中, 使自我與理性變得不可分割, 這時理性的力量便容易使人從世俗的權力中掙脫出來。

數學中的理性探討,不直接依賴於物質, 也使得數學工作者, 較能遠離現實的利誘。當一些生化研究者在國家主義的旗幟下製造 Napalm 這類汽油燃燒彈, 以屠殺越南村童時, 資本主義社會的龐大計劃正隱藏在學術–軍事–企業三結合的底層, 遂行一種反人文主主義的秘密企圖。一個學術研究者被籠罩在這龐大的計劃下, 不由自主, 這便是 Herbert Marcuse 所嚴厲批評的現象: 科技淪爲資本主義體制不可分離的一部份。科技工作者, 寄生在這體制之中, 成爲統治階級的共犯。

數學工作相對於其他科學分支來說, 是比較屬於個人的 (individual), 也比較自主 (autonomous)。某種意義下, 數學的研究應該比較民主 (democratic), 因爲數學的研究比較不容易作類似生產線的分工。一個數學研究所傑出的研究生便可以自己完成從提出問題到解決問題的一貫作業。許多好的數學研究都不是依賴大型的研究計劃做出來的。但這並不是說數學研究是個人心智封閉的產物。數學研究仍然需要互相激發、討論與徵引。同時也需要其他社會條件與科技水準的配合與衝擊。可是數學研究的過程, 比起其他科學分支, 遠爲獨立自主, 而不必在細密的行政規劃下進行。正是這種特質使數學在精神上有遠較開明 (liberal) 的一面, 而在物質上不必太受制於人, 不必太受現實利益所左右, 太受統治階級的指使。

數學研究者如果不因學科本身的訓練陷入封閉與專斷, 它反過來會造就更多自由開明的心智。這詭異的辨證關係其實也是數學研究令人著迷之處。

總結本節所談, 我們約略指出了數學這座六面山的不同面向。在醜陋的山陰, 我們看到了它的三面:

工具的工具
封閉性
專斷性

而在朝陽的那邊, 我們也看到另外三面:

作本質探討
從權威中解放
個體自主而遠離利誘

二、數學教育與通識教育

我在上篇「理性的叛逆與解放」「通識教育中的科學教育」一文中, 曾用專章討論我對通識教育的觀點, 尤其從認知發展的角度談到整體了解與技術訓練兩者之間的辯證關係。指出缺乏整體了解會導致人在分割的知識中異化, 也導致科技只殘存工具理性。作爲科學的基礎, 數學的操作訓練如果沒有整體了解作爲觀照數學的窗櫺, 數學便會退居爲工具

的工具。尤其進入數學結構的探討時, 數學更變得荒誕而多餘。

在同文中, 我也談到教育的目的。Krishnanmurti從心理的層次強調教育的目的在於免除人的恐懼, 可是現世的教育, 效果經常相反, 受的教育越多, 心中的恐懼也越多, 其實這是由於知識被分割得支離破碎, 專業與謀生被劃上完全等號的緣故。

從知識層次來說, 教育的目的與其說是要灌輸知識, 介紹知識不如說是要透過知識的發生催化人知性的成熟。通識教育常被誤解為全面的引介知識, 使無偏廢。以這種觀點理解通識教育會引致嚴重的錯誤。事實上, 通勢教育應改用較靈活較動態的觀點來看待。知識是人與外界互動的經驗, 通識教育的內容應該是使人在每一主要文明領域中深入領略人如何耕耘而取得知識的方法與過程, 透過這過程中促發人知性上的成熟。

要催化人的知性成熟, 便須培養人對世界乃至對某一專業的整體了解。在專業 (如數學) 的養成訓練中, 如專注於分工後的某一區段, 使技術提升於整體了解之上, 那麼人反而會在專業中迷失, 把自己當作外物的工具, 產生排斥其他一切的技術意識。這是資本主義社會從事專業研究者的困境。而這現象不但發生在數學、科技甚至發生在法律、經濟以及文學藝術之中。把數學作爲人類文明的一支, 作爲人歷史活動的一面, 同時引導學習者, 溶自身於人類文明與歷史活動之中, 才能在數學教育中發揮通識教育的功能, 有助於提升人知性成熟的教育目的, 也才能讓學習者透過數學的整體了解, 掌握到前節所述的六個面向。

這理我提出幾點也許值得注意的做法:

(1)把數學當作人的活動, 當作人與自然對話的經驗, 而非先天的、靜態的自然規律, 亦非死的、現成的絕對真理。數學雖然有很大部份在發現與發展理性結構, 但結構是因現象而來, 結構之前有問題, 結構之中也有問題, 甚至結構之後仍有問題。要讓學生隨時意識到數學的結構是一連串問題問下來之後才累積出來的數學理論。「問題在那裡?」是隨時應該讓學生明白的事。知道問題所在, 才能分辨自身所在,也才能發生人的主體意識。理論產生之前應該有問題, 有了問題之後則開始分析問題, 開始嘗試錯誤, 因爲人類所有的知識都是人活動的痕跡, 沒有分析問題、沒有嘗試錯誤便沒有活動。數學的推理與結構不是空想得來的, 而是分析問題、嘗試錯誤後的產物。可是我們常只教推理與結構, 只將定義-定理-證明。這使得數學看起來不再是一種人文活動, 而是天上掉下來的死的東西。

(2)「現象 $\rightarrow$ 結構 $\rightarrow$ 現象」如此不斷循環發展過程, 才是數學的本來面目。只割裂其中一小段內容來教導學生, 會使得學生無法對數學的內容有較整體的了解, 而被窄化於技術層面。一貫作業使人明白工作全程。手工業時期的木匠在工作上給予兒女的啓蒙, 也許比現代企業下的工程師能給予兒女的, 更爲深刻而眞實。能經歷從素材到成品, 一步步解決問題, 克服困難的整段訓練過程, 才有助於人的知性成熟。

(3)學習數學, 不只當它作自身嘗試錯誤的活動。對於已有的數學理論, 也應該當它作前人摸索的經驗。數學史的講授是必要的。但數學史不應該被視爲天才的軼事來教導。遠

爲重要的是人類在不同的時間面對什麼樣不同的問題, 用什麼樣不同的哲學態度看待自然, 發展數學, 從而孕育了什麼樣的數學思想, 引發了什麼樣的爭議, 當時的社會條件又與數學的發達存在著什麼樣偶然與必然的關聯。作爲人類文明活動的重要分支, 數學史只有用上述觀點去討論, 才能引發學生的知識熱忱, 帶領他們溶自身於人類文明之中。數學史不一定要另外開課, 較有效的做法是潛藏於各門課程之中, 使各門課程的數學內容不致孤立於人的歷史活動之外。我不妨舉幾個例子說明我心目中所認定值得提出來討論的題材:

(I) Euclid「幾何原本」與西方哲學思想的抽象特質

(II) Plato 幾 Archemides 對數學問題不同的哲學態度

(III) Fermat, Newton, Leibniz 對無窮小、無窮大、無窮和的哲學探討

(IV) 十九世紀數學嚴格化運動的爭議 (Cauchy- Weierstrass-Dedekind-Cantor)

(V) 康德的先驗純粹理性與非歐幾何

(VI) 從 Laplace 的古典決定論引到 Gödel 數學語句的無眞僞性 (undecidability)。

上述提及的例子, 只是一時想到的, 我認爲討論這種題材, 會助於促發人的思想成熟, 或至少對人的思考有較深刻的衝擊。

(4)數學亦是一種語言。一般我們所使用的各民族語言如果稱之爲人文語言的話, 那麼數學可以說是自然語言。建立這套自然語言, 是爲了要與「自然中的理性」對話。我所說的「自然中的理性」, 像負負得正, 像虛數 $\sqrt{-1}$ 的美好特性, 或像Hopf-Poincaré 的奇點定理等等, 這些是看不到摸不到, 但隱藏在自然之中眞實存在的東西。這種看不到的自然理性構成了自然界看得到的現象中的基本規律, 從而孕育了人本身的理性。最後人本身的理性又成爲現代文明的特徵。也因爲這環環相扣的關聯, 人與自然中的理性對話的語言, 變成了人類文明的重要元素。在這裡我不用「重要工具」, 而改用「重要元素」, 理由是是語言不只像一般人心目中所認爲那樣, 只是工具而已。語言事實上反過來深刻的影響到人思想的內容與方法。數學作爲人類的自然語言, 如同通常所指的人文語言一樣, 也影響到人類文明的構成。十九世紀末期 Lancelot Hogben 便已指出數學是大小的語言, 數是名詞, 運算是動詞。但這種觀點仍窄化了數學的意義, 忽視了它與自然中的理性對話的語言本質。由於數學具有語言的本質, 它也就促成了人與自然之間、人與人的理性之間有關的溝通 (communication) 與互動 (interaction), 從而扮演起詮釋 (hermeneutic) 的功能。以 Jürgen Habermas 對人類趣向的分類來說, 數學既具有其技術趣向 (technical interests) 及解放趣向 (emancipatory interests), 更由於它的語言本質, 亦具有實踐趣向 (practical interests)。對於數學有這樣的整體了解, 會

使學習者在投入數學研究的同時，較容易明白自身與自身工作的定位。

以上所提這幾點做法，主要目的是想藉注重整體了解的數學教育促成人知性上的成熟。如果把數學斷章取義的等同於抽象或推理，那麼數學會變得煩瑣無味，且會有工具化、封閉與專斷傾向的流弊。而整體了解則有助於人知性上的成熟。注重整體了解的數學教育, 與通識教育的目的是一致的。

完整的數學教育，便是一種人文素養的教育。我這樣說, 也許會令專業人文學領域的人感到錯愕或拒絕同意。但對於一個了解數學本質的人來說, 由於數學是人的活動, 是人類文明史上的重要一頁，那麼從數學中可獲得人文素養, 無疑的是天經地義的事。

參考資料

1. Freeman J. Dyson, To Teach or Not to Teach, Amer. J. Phys., June (1991), vol. 59, No. 6, p.495.
2. Immanuel Kant, Critiques on Pure Reasons.
3. Morris Kline, Mathematical Thoughts from Ancient Age to Modern Times.
4. 黃武雄， 初等微分幾何講稿， 台大數學系 (1978)

—本文作者任教於台大數學系—