我們教出的學生說 $2.\overline{9} < 3$

王淑霞

問題一: $0.\overline{9} < 1$ 嗎?

如果我們問國小五, 六年級的學生 : $0.999\cdots$(小數點後沒完沒了的9) 跟1比大小, 那一個大?

如果我們問國中生: $0.\overline{9}$ 與1那一個大?

如果我們再去問高中生 (正在念或念過了第一冊第二章數列與級數者): $0.\overline{9}$ 與1那一個大?

相信得到的答案大多是: $0.\overline{9}$ 比1小!! (有數據爲證, 參考附錄1)

但是如果再繼續問高中生: 無窮等比級數: $\frac{9}{10}+(\frac{9}{10^2})+(\frac{9}{10^3})+\cdots+(\frac{9}{10^n})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ 的和是多少? 答案眞是令人滿意: $\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$! 不妨再問一次: $0.\overline{9}$ 與1那一個大? 答案還是1比較大!! 那我們不妨把1與$0.999\cdots$ 拿來減一減, 當然用大的減小的嘍! 而且用直式減:

$$\begin{array}{r} 1.0000\cdots \\ -\ \ 0.9999\cdots \\ \hline 0.0000\cdots \end{array}$$

發現相減後的數小數點後每一位都是0, 總有一位是1吧!不行! 都被後一位借1借走了!怎麼寫都是0!! 國小, 國中, 高中學生都迷惑了! 心頭也被震撼了一下, 好奇怪的事?!這眞是個好的開始, 得好好引導學生認淸: $0.\overline{9}$ 到底是什麼東西?

先從數的符號認識起吧!例如:123是什麼? 是十進位數, 是 $3+2\times10+1\times100$ 的簡寫; 0.123 是 $1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10^2}+3\times\frac{1}{10^3}$ 的簡寫; 0.999是 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}$ 的簡寫; 那麼 $\underbrace{0.999\cdots9}_{n\text{個}}$ 是 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}$ 的簡寫; 發現以上諸數都是有限項和的簡寫, 有限項的和就叫作有限級數, 而 $0.\overline{9}=\frac{9}{10}+(\frac{9}{10^2})+(\frac{9}{10^3})+\cdots+(\frac{9}{10^n})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ 是無限項的和, 又叫無窮級數的和, 所以 $0.\overline{9}$ 是一個無窮級數和的簡稱, 那麼無限項的和要怎麼算? 只能一項項加嘛! 萬丈高樓平地起呀! 先從第一項加起: 令 $S_1=\frac{9}{10}$, $S_2=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}$, $S_3=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3},\ldots$, 一項一項加, 加到第 n 項, $S_n=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}$, 此爲一個有限等比級數, 其和爲 $1-(\frac{1}{10})^n$, 而 n 越大的話, 第一項加到第n 項的有限 n 項和就越來越接近無限項的和, 所以如果 n 越大, 有限項和越來越靠近“某個數”的話, 那麼這個“某個數”就應該等於無窮級數的和 $0.\overline{9}$!!

故而觀察一下 $S_n = 1-(\frac{9}{10})^n$, 當 n 越大時, S_n 越靠近的"某個數"是什麼? 答案是1!! 所以 $0.\overline{9} = 1$。這麼一來,1的表法不是唯一了! 同樣的, $2.\overline{9} = 3.0$, $2.54 = 2.53\overline{9}$, 任何一個有限小數都可改爲無窮小數。把以上的思路過程一般化, 得到無窮級數和的定義:

欲求無窮級數的和, 先求前 n 項部分和 S_n, 再看 $n \to \infty$ 時, $S_n \to$"某個數", ($\to$ 唸作趨近), 如果"某個數"存在的話, 就規定此無窮級數的和等於"某個數"。又" $n \to \infty$ 時, $S_n \to a$ "這個現象用記號 $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ 表示, 極限的符號及概念也因此很自然被引進來了!! 所以符號 $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ 只是表示當 n 趨近於 ∞ 時, 數列 S_n 逼近 a 這一現象而已; 極限沒有什麼好怕的!

又若學生反駁: 無窮級數的和 $= \lim_{n\to\infty} S_n$, 那是定義中規定的, 實際上是不是眞的相等, 天知道! 那麼我們不妨再以莊子的名言作印證, 以顯示定義中的規定合理, 有理!

莊子有言: "一尺之繩, 日取其半, 萬世不竭", 故若把每天取的繩長累計下來由第一天到第 n 天取的總和得: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = S_n$, 如果 n 越來越大的話, S_n 越來越逼近繩子的總長1, 另外從 $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1-(\frac{1}{2})^n$, 其中 $(\frac{1}{2})^n$ 趨近於0, 所以 $1-(\frac{1}{2})^n$ 趨近於1, 兩個途徑的結果相吻合!

以上述方式作爲無窮級數和的教學以及數列極限概念的引進, 不知道 (心裡盼望) 可否讓學生對這兩種概念的吸收容易些, 恐懼感也少一些? 也盼望再問一次: $0.\overline{9}$ 跟1誰大? 答案也許會令人滿意開心呢!

問題二:

設 $\overrightarrow{a} = (-1,2)$, $\overrightarrow{b} = (1,b)$, 滿足條件: $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 $150°$, 求 b。(題目來自於76年師大科教中心版高中數學教科書第二册習題4-4)

大多數學生的解法如下:

$$\because \cos 150° = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

$$\therefore \frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

兩邊平方

$$\frac{(2b-1)^2}{5(b^2+1)} = \frac{3}{4},$$

得解

$$b = 8 \pm 5\sqrt{3}。$$

但正確答案爲 $8-5\sqrt{3}$。

仔細審視上述解法過程, 曝露了學生學習上的兩大問題, 而這也是我們在第一線工作者要注意的:

(一) 好習慣的培養問題: 一般教科書上的習題, 書後均附有答案, 學生算完後應馬上對答案, 答案有問題, 應立即檢視錯誤的原因, 挑出是觀念理論的錯誤還是計算習慣不好導致的錯誤, 不好在那裡, 找出來努力去修改, 例如, 兩邊平方的計算, 一般學生常犯的錯誤是左邊平方算完, 右邊就照抄, 忘了平方, 找到錯誤所在, 對症下藥, 不妨先在兩邊打上平方的記號, $(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}})^2 = (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2$, 再繼續往下算, 那麼這種錯誤就可避免了; 這樣的面對問題方式, 相信比把學生叫來體罰打手心了事有意義多了! 而經由數學的教材, 不只是

教數學, 還順便培養成長中的孩子時時自省, 做事細心, 爲自己的錯誤負責, 即時改進的好習性, 相信這樣培養下來的孩子, 將來不管在什麼崗位做事, 一定是比較負責用心主動積極的, 如果你是中油的主管, 一定比較放心把工作交給這樣的人 (有感於最近中油工安事件不斷)。如果我們能在每一次數學考試過後, 教導學生不要只重視卷面上的分數, 更要重視分數背後的訊息, 是沒下功夫呢? 還是下了功夫但效果不好, 那就更要找出原因, 不然挫折感更重, 信心受到打擊。除了知道正確的解法, 還要翻開考卷背面的計算式找出自己的錯誤, 這才發現有的學生連計算式都找不到, 有的計算式書寫得龍飛鳳舞連自己也看不懂, 原來是一開始, 計算的空間很多, 就奢侈浪費, 龍飛鳳舞, 到後來不夠地方寫了, 就只好東寫一點西寫一點, 到最後找不到計算式, 答案都會抄錯。好好培養節儉整齊的習慣, 不要因爲計算過程不必給閱卷先生看就書寫凌亂, 還是應書寫題號, 整齊條理, 最好平常就養成這習慣, 於是紙張也不浪費, 有環保概念!! 一一審視寫整齊的計算過程, 常常會發現自己一些習慣性的錯誤, 例如 0 乘以 1 等於 1, 13 乘以 4 等於 42, . . ., 找到原因了, 心裡很踏實, 不會有看到分數就淚眼汪汪, 考卷揉一團往抽屜一丟就沒事了的反應! 作爲數學教師, 亦爲人師, 給成長中的孩子影響多深遠啊!!

(二): 解題過程中, 進行變換時, 要求邏輯上等價充要的觀念非常薄弱;

$$\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(A)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \text{(B)}$$

但 $\Leftarrow$ 不成立,(B) 式只是 (A) 式的必然結果,(A) 的解必是 (B) 的解, 但 (B) 的解不一定滿足 (A), 故而把原式取代以兩邊平方的式子, 可能有增根, 不一定是同義等價充要的式子; 可以修改爲:

$$\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b-1<0(\text{由(A) 式得的先天條件}) \\ \left(\frac{2b-1}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+1}}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

這樣就不會有增根的問題了!

我們得在教學過程中, 藉著各種可能的題材, 融入並強調推演過程中講求邏輯上等價充要的觀念, 有必要時, 加上“ $\Rightarrow$ ”或“ $\Leftrightarrow$ ”的符號; 檢視教科書中的題材, 座標幾何, 圓錐曲線, 拋物線, 橢圓, 雙曲線標準式的推演過程中, 都是很好的引進並強調這個理念的機會。

附錄: 1995年大考中心預試試題:

1.若 $2.\overline{9}$ 表示無窮級數 $2+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots$ 之和, 則下列敘述那些是正確的?(多選)

(A)$2.\overline{9}<3$(B)$2.\overline{9}=3$ (C)$2.\overline{9}\le 3$(D)$2.\overline{9}$ 的整數部分是2(E) $2.\overline{9}$ 的整數部分是3

(預試結果: 答對率:2%, 選 (A) 者佔 68% (D) 者 74%) (答案爲:B,C,E)

2.關於方程式 $\frac{2x-1}{\sqrt{5(1+x^2)}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, 下列敘述何者正確?(多選)

(A) 無實根 (B) 恰有一實根 (C) 恰有二實根 (D) 其實根皆小於 8 (E) 有一實根大於 9

(預試結果: 答對率 7%, 且高分答對率 8%, 低分答對率 8%) (答案爲:B,D)

—本文作者任教於省立新竹女中—