

# 漫談中學數學教師素養

謝豐瑞

## 楔子

### 鬼的信念

筆者小時家住在一個小山腰上。山上有許多墳地。所以我家就成了送葬必經之路。每每聽到樂隊吹奏「驪歌初動，離情麓麓，…」，我就偷偷的從門縫中向外看。感覺外面多樣的花朵、長排的車陣、吵雜的樂隊搞得氣氛格外熱鬧；然而花車中往往有一個長長的木頭箱子，許多人卻穿戴得怪七怪八的扶著箱子大哭小叫。這種好似衝突又融合的景象，深深的吸引著好奇的我。在小小的心靈中印下了不知如何形容的深刻印象。

稍大時漸漸懂得，原來木箱中躺了一個長眠的人，而這件事，值得那些穿得奇奇怪怪的親人哭斷肝腸。從此，每當這些熱鬧又悲傷的隊伍經過我家門前時，我仍會被吸引著去偷看，但心中卻多了一層悲傷。

那時剛開始有黑白電視，家裡省吃儉用買了一台。過了一陣子，電視節目「八號分機」大流行，浴室底下埋著死屍，人被活生生的分屍裝袋，…，一件件的慘案，一幕幕可怕

的鏡頭呈現在我眼前。在我心中，死亡不再是單純的停止呼吸，不再是單純的埋入土中，而是與慘死、變鬼畫上了等號。

從此，每當那熱鬧又悲傷的隊伍經過我家門前時，我仍會被吸引著從門縫中偷看，但是，在我的心裡卻悄悄的增加了害怕、恐懼。總覺得那些隊伍有些詭譎。木箱中的人不知會不會變成厲鬼？扶著棺木哭的人是不是殺人兇手？樂隊的人會不會被抓去當替死鬼？

更可怕的是，這些事情會不會發生在我的周遭？甚至我的身上？於是，在還沒被厲鬼吃掉，還沒被抓去當替死鬼之前，我已經變成了一個十十足的膽小鬼。每天，天色一暗，就開始疑神疑鬼。床鋪下有鬼、桌子下有鬼、廁所裡有鬼、窗戶外有鬼、… 那些鬼真是無所不在。

日復一日，不知過了多少日子。漸漸的，我愈來愈受不了。媽媽天生膽子大，從不相信有鬼，她說即使有鬼我們又沒害他，他也不會來捉我們。我雖然相信她的話，但是小小的心裡仍然怕得要命。一天晚上，在被鬼搞得求助無門的時候，我下了一個決心，求人不如求己，抱著大不了被鬼吃掉的必死決心，我勇敢

的瞪向「有鬼」的桌子底下，結果……，什麼也沒有。於是，就這樣，床鋪下、廁所裡，家中裡裡外外幾乎都被我瞪過。只要一懷疑哪裡有鬼，我的眼睛就瞪向何處。

從此，小小的我變成了大膽鬼。在我的信念中這個世上是沒有鬼的。都是自己疑神疑鬼，其實鬼根本不存在。每每有人和我提起怕鬼時，我總會反問一句：「你看到過鬼嗎？」「沒看到怎麼知道有鬼？」

就在幾個月前，發生了一件事，又改變了我對鬼的信念。

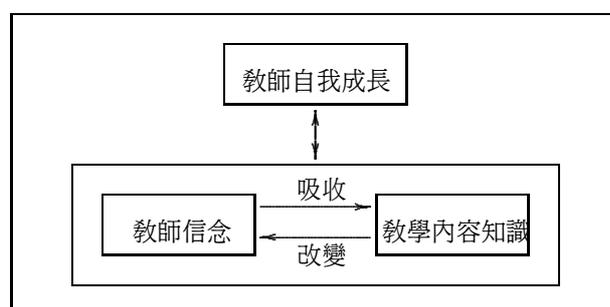
又是電視惹的禍！在一個專播探索自然界現象的頻道，一個有關大象的節目深深的吸引了我。瑣瑣碎碎的細節就不累敘。直接從一位專門研究大象的博士談起。她深入研究象群的現象，發現有時一隻母象在搖動牠的大耳朵時，其他的大象也會跟著搖動。而同時，她感覺到似乎有一股奇怪的氣流從象群中流向她。因此，她懷疑這些大象正在交談。然而經過多次的觀察、實驗、錄音，都聽不到任何聲音。這時，她大膽的作了一個假設：也許這些大象所發出的聲音超出了我們人類所能聽到的音頻極限。於是，她使用了一種很特

殊的儀器，將母象耳朵擺動時周遭的聲音錄下，再以極高倍數的速度播放，果真，聽到了大象的叫聲。經過實驗發現這種頻率很低的聲音可以傳到數公里遠，和遠方的象群連絡。

看完這個節目後，不敢再說聽不到就是沒有，也不敢再說看不到就是不存在了。「鬼」到底存不存在呢？我不敢說。但是我敢說，我對他的信念卻改了好幾次。

\* \* \*

教師素養不是三言兩語可以談完的。筆者高中時的數學老師葉東進先生命我以一個師資培育者的角度來撰寫此文。師命難違，答應後幾度輾轉難眠，思考要如何在短短的幾千字中給老師們一些啓示。在幾經思考後，決定從教師的信念及教學內容知識兩方面來談談教師的自我成長。這兩方面是息息相關的。我們可以從下圖中看出它們的一些關係：教師的信念影響其是否願意吸收教學內容知識、從哪方面吸收等等；教學內容知識豐富後，教師的信念也會跟著改變；如此不斷的循環，教師自我也不斷成長，這種成長也同時影響其信念及吸收知識的向度。



## 一、教師信念：

一般而言，信念並非直觀的感覺，並非盲目的信仰。那到底信念是什麼呢？我們無法給它下一個明確的定義。大體來說，可以把它想成是個體從大量的經驗中，透過認知（隱涵的或外顯的），在腦海中對經驗的歷程與所產生的結果形成印象。因為新的經驗不斷的產生，所以信念也會跟著逐步修改。除非個體對新經驗的認知與原有信念有強大的衝突，否則信念是不會快速變動的。它們常常浮出來影響個體的行為。楔子中筆者對鬼的信念即為一例。底下的例子說明信念對行為的影響。

裘先生的成長過程中母親管教嚴格。結婚後，太太很溫柔。一天晚上，他多喝了些酒，微醺的回到家中。妹妹和太太正在客廳看電視。太太一看到他，眉頭一皺，以幾乎分不出是生氣或不捨的語氣說：「今天怎麼喝那麼多，這樣會把身體搞壞的。」裘先生忙以道歉的語氣說：「對不起嘛！我知道妳會擔心，下次我一定會節制一點。」這時媽媽走進客廳，一看到微醉的兒子，眉頭一皺，以幾乎分不出是生氣或不捨的語氣說：「今天怎麼喝那麼多，這

樣會把身體搞壞的。」裘先生立刻以不耐的語氣說：「媽，我已經三十歲了，妳可不可以不要這麼這麼小的事也管。」妹妹坐在一旁，不平的說：「哥！媽媽和嫂嫂說的話都一樣，為什麼你有這麼大的差別待遇?！」

同樣的內容、語氣，在裘先生的眼裡竟有如此大的不同。雖然造成這種結果的因素可能很多，但不可否認的，信念絕對扮演著重要的角色。諸如，在裘先生的信念中，媽媽多數會為了小事責備他，而太太管他則是出於關心。也許他還有一個信念：長大了媽媽就應該放手不管了；但是結婚了，太太管他卻是天經地義的一件事。

一位高中老師向我反應，他一週要上21節數學課，實在很累，學校簡直是剝削勞力；同校的另一位老師告訴我，學校很照顧他們，都讓他們超很多節課，在學校的時間沒有浪費，可以多賺一些鐘點費。

A老師是一位國中數學教師，以往都是帶A段班。在學校實施常態編班後，他抱怨這個制度，認為是國中教育最大的、有形的殺手；因為它的實施，造成班級管理的困難，為了要等那些學習緩慢的同學，剝奪了好學生

的學習機會。C老師帶的多半是 C 段班，他舉雙手贊成常態編班，認為它是學校教育的救星；從實施後，班上不再有一大票自我放棄的學生，即使仍有一些學生學習困難，但班級的管理、學生的求學態度和生活態度都有極大的改善。這兩位老師從不同的經驗中各自產生了不同的信念。一位教育專家在聽了他們的爭論後說：「你們所說的情形我都知道，不過我們應回到國中教育目標這個基本層面來看，國中的教育是以生活教育、品德教育及民主法治教育為中心，培養德、智、體、群、美五育均衡發展之樂觀進取的青少年與健全國民為目的。所以，在編班上，我主張……。」

像這類的例子不勝枚舉。不同的信念，使得個體在遇到事情時有不同的感覺及處理方式。正因為如此，在教學上，教師的信念就往往會影響教學的歷程及結果了。然而，怎樣的信念才會對教學有幫助呢？如果我告訴你什麼是應有的信念（前提是真的有「應有」的信念。），那麼沒有經過足夠經驗的累積，它也不一定會成為你的信念。從和教師們接觸的經驗來看，我發現唯有教師自己多聽、多看、多學，才有機會培養出自我較成熟的教學信念。

現代的社會是一個多元化的社會，開放的觀念和迅速的變化都是它的特點。要教育年輕的下一代，就不能與他們的時代脫節。所以，在我們聽、看、學的時候，必須秉持著走出象牙塔的觀念，以一顆開放的心、求新求變的態度來吸收教與學方面的知識。這樣才能拓展我們的視野、接受各種不同的觀點、作出最好的評估、孕育出自我最佳的教學信念。

教學信念涵蓋的範圍很廣，無法一一述及。底下僅以拋磚引玉的心情來看一個例子。

### 數學與數學學習

如果有一天，在下面這樣的討論中，你可以插上一腳，瞭解別人在說什麼，自己也能提出自己的見解。那麼你就可以說：「我已經透過吸收知識，對數學和數學學習有了自己的信念。」

甲師：「我贊成柏拉圖的觀點，數學本來就存在於一個理想國度中，雖然我們看不到、摸不到，但是我們可以慢慢地去發現。既然她是本來就存在的，我們當然應該去認識、學習她。」

乙師：「我不認為她是存在於理想國裡的，我覺得亞理斯多德的觀點比較有意義，數學是我們人類從生活周遭的事物中一層一層抽象出來的，而學生應學的是她在生活中代表的意義。」

丙師：「其實你們也別爭個半天，數學最重要的就是她的形式化。我們自己給些定義規則，在滿足我們所定的規則下，經過推導而得。」

丁師：「如果從數學史的發展來看，數學家往往是根據已有的數學基礎，作一些猜測、假定，再經過一些數學或科學的推理、實驗方式獲得的。所以學生也應該這樣的學，讓他們自己去假設，再經過邏輯的或數學的推理方式得出他們自己的數學知識，這樣才有意義。」

乙師：「所以你是比較偏向建構主義的學習理論囉！但是我覺得以學生的那一點點小程度，他們哪能推出什麼東西！就拿負數來說，當時數學家們還不是吵翻天，推理來推理去的，有人承認負數，有人不承認負數。學生哪有能耐得出什麼結論。」

丁師：「但是如果只要他們不斷的練習再記住結果，等到不用的時候還不是忘光了。什麼也沒有了。還不如讓他們經歷這個發現、推理的歷程，至少對他們的推理能力有所幫助。」

：

## 二、教學內容知識

在這兒說的教學內容知識包括：所要教的內容之「正確」知識是什麼、和她相關的知識有哪些？這個知識在各種不同的領域中所扮演的角色是什麼？應教到什麼範圍？難度？等等。它不僅牽涉到數學知識，也牽涉到數學本身以外的知識。同樣的，在這兒，我們也只想做拋磚引玉的工作。

底下所述學生的疑惑都是確實有學生提出過的。

### 函數外一章

以函數的例子來說，如果你曾有過類似下面的經驗，你就可以很驕傲的認為自己是位上進的老師，不斷的在充實自我的教學內容知識。

生：「老師，為什麼有人要發明函數這個東西？」

師：「因為...？你問那麼多做什麼？好好把它學會就好了。」(似乎有點遜!)

生：「但是我常常想這個名稱好抽象，『函數』這兩個字和你上課說的『 $x$  值給定時， $y$  的值也隨著確定』有什麼關係？」

師：「那是定義嘛，數學定義當然要給名稱啊！」

生：「可是我們國中時，老師是說，函數是一種對應關係。」

師：「那和我們的定義是一樣的，自變數  $x$  和應變數  $y$  之間的關係就是一種對應關係。」(有點道理。)

生：「可是國中時，老師說可以把天數對應到月分。所以我可以把31對應到 January, 28對應到 February, ...，月分也可以不用數表示。」

師：「但是月分也可以用數表示!？」(有點困惑了!)

生：「到底對應關係是不是一定要是數之間的關係？把小孩對應到親生父親可不可以算是函數？」

師：「應該可以。」(應該?)

生：「如果不是數的對應關係，那為什麼要稱為函『數』呢？『函』又是什麼意思？」

師：「這個老師回去查查看。」(不再用定義來搪塞了。)

經過一年，又到了要教函數這個概念的日子。上課鈴聲想起。師愉愉快快的走進教室。

師：「各位同學，你們知不知道地球是繞著太陽轉的？」

生：「老師！別開玩笑了，你當我們是……。」

師：「你們知道嗎？這個理論是由哥白尼提出的，但是當時很多人並不相信，大約在三百多年前，有一位發明大師他用自己發明的望遠鏡證實了這個理論，但是卻因為這個事件被判犯了邪說罪，遭到軟禁，到78歲時，在軟禁中去逝。他的罪名直到1980年，也就是十八年前才被宣布取消。這個倒霉的科學家叫伽利略……」（師正在說一個有關函數祖師爺的故事。）

在介紹到尤拉用了  $f(x)$  的函數符號後，師進行了函數的課程。學生似乎覺得函數不再那麼冰冷。

又到了上數學課的時間，師仍然愉快地走進教室。

師：「上次我們說到那位新好男人尤拉用  $f(x)$  來代表函數。今天我們來看看在我國，一百三十多年前，清朝數學家李善蘭和英國人佛烈亞力……，函數的名稱我們一直沿用至今。但是過了二十多年後，又有一位叫戴德金的數學家把函數的定義又放寬了，……。」

師終於知道函數名稱的由來了，也知道了為什麼名稱爲函「數」可是對應關係卻不用限制在數與數之間。同時師也發現到「正確知識」中的「正確」是會依時代而改變的。

## 多項式外一章

以多項式爲例，如果有一天，你能幫助下面這位可憐的教師回答他的學生提出的問

題，那麼你就可以放心的說：「我對多項式這個概念的教學內容知識足夠了。」

生：「老師，爲什麼要把非零的常數多項式次數定爲0？」

師：「你這個問題很好，可見你有用腦筋想。因爲我們可以把  $a_0 + a_1x + a_2x^2$  寫成， $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2$ ，所以可以把  $a_0$  寫成  $a_0x^0$ ，因此它的最高次數爲0。」（嘗試給一個合理的答案。）

生：「那零多項式的次數爲什麼不定義爲0？而要說它沒有定義呢？」

師：「因爲我們說多項式的次數是係數不爲0的  $x$  的最高次數。零多項式沒有一項可以使係數不爲0，所以不定義次數。」（似乎是一個合理的答案。）

生：「老師，我還是覺得怪怪的，是不是像  $x^2 + x + 1$  這種多項式可以把它寫成  $x^2 + x^1 + x^0$ ？」

師：「可以。」

生：「我們以前不是說  $0^0$  沒有意義嗎？所以這個多項式的  $x$  就不能等於0了，要不然它的常數項就會沒意義，是不是？」

師：「這個嘛……？」（合理性？迷思了！）

生：「老師，到底多項式中的  $x$  代表的是未知數還是變數？」

師：「應該是變數……！」（數學素養還有一點作用。）

生：「那這些變數是不是要排除0？」

師：「這個嘛……？」（師也認知衝突了！）

生：「既然  $x$  是變數，那麼它的四則運算不是就和數的運算相同了嗎？爲什麼還要特別去講它的運算？」

師：「這個嘛……？」

：

生：「老師，為什麼  $\frac{1}{x}$  與  $|x|$  不是一次函數？」

師：「因為  $\frac{1}{x}$  中的  $x$  在分母， $x$  在 0 沒有定義……」（又牽涉到 0，師沒有把握了！）

師：「因為  $\frac{1}{x}$  可以寫成  $x^{-1}$ ， $x$  的次數是  $-1$ ，不是  $1$ 。」（師嘗試用另一種說法。）

生：「為什麼可以把它寫成  $x^{-1}$ ？」

師：「嗯，……」（真是一波未平一波又起。）

生：「那先說為什麼  $|x|$  不是一次函數好了。」

師：「嗯……，因為一次函數指的是沒有絕對值的!？」（屋漏偏逢連夜雨。）

生：「為什麼要限定它沒有絕對值？」

師：「嗯，……」（師想：一定有一個合理的答案才對。）

讀者可以看出來，本文並沒有提供完整細膩的教師素養題材。只想藉這個機會談談教師的自我成長，並提供一些可以思考的方向。事實上，可以思考的方向仍非常非常的多。二十多年前，筆者就讀於台中曉明女中，當時葉東進老師即曾經在課堂上實施過數學

閱讀測驗，令筆者記憶深刻。二十多年後，筆者常看到許多老師上課時仍一味的講述。如果時代在進步，社會在多元化，而我們的教學仍停頓、甚或倒退，那麼我們的教育就值得擔憂了。在此，我希望能與教師們互勉：教學生涯是一種不斷反省思考的歷程，唯有養成終生學習的態度，才能使我們的教學更上一層樓。

## 參考資料

1. 國立編譯館，民 78，高級中學基礎數學第一冊，國立編譯館出版。
2. 國立編譯館，民 81，國民中學數學第三冊，國立編譯館出版。
3. 國立編譯館，民 87，國民中學數學教師手冊第三冊，國立編譯館出版。
4. 謝豐瑞，陳材河，民 86，函數的一生，科學教育月刊，第 199 期，第 34-43 頁，國立臺灣師範大學科學教育中心。

—本文作者任教於國立臺灣師範大學數學系—