傅立葉級數

單維彰

一. 前言

八十四年及八十六年的春季, 我在中央大學嘗試了一門新的課程, 現在定名叫計算富氏分析 (Computational Fourier Analysis)。課程的內容是以傅立葉級數 (Fourier series) 和傅立葉轉換 (Fourier transform) 爲數學基礎的應用與計算問題, 包括介紹凌波函數 (wavelets), 以及介紹數位訊號處理 (signal processing) 這個應用課題, 還有關於它們的演算法則。

有鑑於數位化的聲音與影像, 逐漸隨著電子計算機網路的普及而成爲日益重要的新資料形態。我認爲訊號處理這門課題應該會成爲應用數學的一支重要方向。因此也希望這一代的學生能夠及早接觸這個領域。所以我選擇將這門課設計成大學三四年級程度的選修課程。預備知識只留下傳統的高等微積分和線性代數。

爲了有足夠的時間處理應用課題, 我們必須精簡地介紹數學的理論基礎。何況大部分學生在學期之初並不具備完整的數學背景 (我們鼓勵學生同時修實變函數論或富氏分析之類的純數學課程, 以收相輔相成之效, 但並不是很多學生能夠接受這樣的建議)。所以我們必須在相對來說比較短的時間內, 爲學生準備一套比較簡略的數學基礎課程, 以備後來的應用課題之需。

首先我們花三小時複習線性代數, 特別是將正則基底 (orthonormal basis) 推廣到對偶基底 (dual bases) 和框架 (frame) 的觀念。然後花三小時簡單地介紹 L^2 空間和模 (norm), 內積, 投影這些觀念, 並盡量用 $\mathbb{R}^2$ 平面幾何作爲類比, 提高學生的直覺認識。接著是三小時的傅立葉級數簡介, 然後就開始講傅立葉轉換, 離散傅立葉轉換 (DFT) 和其快速算法 (FFT)。

以下就是我所設計的三小時傅立葉級數課程。此間搜集了將來在應用課題上所需要的核心理論, 和兩個在訊號處理上的兩個極重要的觀念: 高頻係數較小和 Gibbs 現象。除了對本系的選修學生之外, 我也在中央電機和中山應數的短期課程中用過這篇講義。我發現此間的內容雖然簡單而且標準, 卻不爲一般的數學課程所涵蓋。所以, 想嘗試藉這個園地, 將這一小段經過整理的課程與同仁們分享, 並請不吝指教。

二. 定義

所謂 Fourier 級數是指

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

這樣的級數。它首次出現於 Euler (1707–1783) 的一個等式

$$\frac{1}{2}x=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots,\quad x\in(-\pi,\pi)。$$

但是數學史上並沒有以 Euler 來命名這一類的級數。或許是因爲以 Euler 命名的數學結構已經夠多了, 也或許是因爲 Fourier (1768–1830) 發現這類級數的原因具有比較深的數學影響。Fourier 是一個與拿破侖同期的法國人, 曾經是拿破侖的御用科學家, 隨軍遠征埃及, 並對古埃及文化的研究有所貢獻。他所發掘的一件著名契形文字泥版, Rosetta stone, 在他被英國海軍俘虜的時候給沒收了, 現在展示於大英博物館。他的穩定的科學家生活始於拿破侖被流放南大西洋的小島 (1814)。但是他在 1807 就已經提到過這一類的級數。

Fourier 是在研究熱傳導問題的時候, 發現這種三角級數的應用。但是這種級數的使用遠在它的嚴格意義被數學家瞭解之前。由於這 Fourier 級數所衍生的許多數學問題, 諸如一致性與嚴密性等等, 被某些數學家認爲是主導了近代分析學的發展, 並成爲所謂 “數學分析” 的一支主流。至於在這一方面有主要貢獻的人, Rudin 舉出三個我們應該熟悉的名字: Riemann, Cantor 和 Lebesgue。

首先, 所謂三角多項式 (trigonometric polynomial) 是以下形式的函數

$$a_0+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+b_n\sin nx。\qquad (1)$$

其中 N 是一個正整數, x 是實數, 在此我們假設 a_n, b_n 也都是實數。很明顯的, 三角多項式是一個以 2π 爲週期的函數。

由著名的 Euler identity

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$, 我們可以改寫

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},$$
$$\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}。$$

所以, 這個三角多項式又可以寫成

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}。$$

這時 x 是實數, c_n 就是複數了。

習題:

(1) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx=\begin{cases}1 & \text{if } n=0,\\ 0 & \text{otherwise}。\end{cases}$

(2) $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $L^2(-\pi,\pi)$ 上形成一組正則集合。注意, 複數值函數的內積是 $(f,g)=\int f\bar{g}$。

(3) $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\mid n>0\}$ 在 $L^2(-\pi,\pi)$ 上形成一組正則集合。

(4) 定義 Dirichlet kernel $D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$。證明

$$D_N(x)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}。$$

很明顯的, 由 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}$ 的線性組合所造成的函數都是以 2π 爲週期的函數。注意,

除了零以外, 它們不會是屬於 $L^2(\mathbb{R})$ 的函數。Fourier 級數的理論大致上是說, 如果 $f(x)$ 是一個以 2π 爲週期的函數, 什麼時候它可以寫成一個 Fourier 級數的和:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} \tag{2}$$

這個等式的確實意義留待後面說明。

定義 $(u,v)_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\bar{v}\,dx$, 則

$$\begin{aligned} f_n &= (f(x), e^{inx})_T \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx。 \end{aligned} \tag{3}$$

此後, 若 $u(x)$ 是一個以 2π 爲週期的函數, 且 $(u,u)_T < \infty$, 則記作

$$u(x) \in L_p^2(-\pi,\pi)。$$

定義 $\|u\|_T^2 = (u,u)_T = \frac{1}{2\pi}\|u\|^2_{L^2(-\pi,\pi)}$。

三. 實驗

注意 (3) 式。由於 e^{inx} 覆蓋整個 $[-\pi,\pi]$, 所以 $f(x)$ 的一點局部的變化就影響到所有 f_n 的值。換句話說, 即使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 只有在很小的一段區間內不同, f_n 和 g_n 也可能就全然不同。

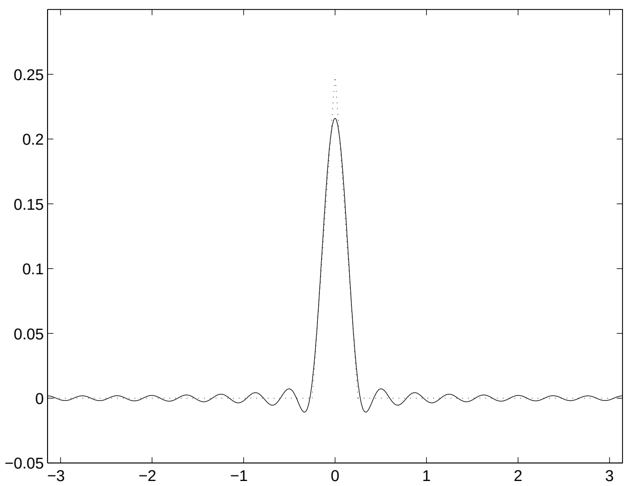
例如, 若 $f(x)=0$, 則 $f_n = 0$。但是若變化一點點, 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - |x| & \text{if } |x| < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$x \in [-\pi,\pi], \tag{4}$$

然後拓展 $f(x)$ 成 2π 週期函數。可見 $f(x)$ 是一個偶函數, 所以對應 $\sin nx$ 的係數都是零, 故 $f_n \in \mathbb{R}$ 而且 $f_n = f_{-n}$。計算得 $f_0 = \frac{1}{32\pi}$, $f_1, \ldots, f_{16}$ 的值依序是:

0.0099	0.0097	0.0095	0.0091
0.0087	0.0082	0.0077	0.0070
0.0064	0.0057	0.0051	0.0044
0.0038	0.0031	0.0026	0.0021

而所得的部份和如圖一。



圖一

四. 基底

首先講幾個非 Fourier 級數所專有的一般理論。如果 $\{\phi_n(x)\}$ 是在 $L^2(a,b)$ 上的一組正則集合 (未必是基底), 令 $V = \text{span}\{\phi_n(x) \mid 1 \le n \le N\}$ 是一個有限維子空間。則 $f \in L^2(a,b)$ 在 V 上的投影是

$$Pf(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n \phi_n(x), \quad 其中$$
$$f_n = \int_a^b f(x)\bar{\phi}_n(x)\,dx。$$

那麼 Pf 將是 $f(x)$ 在 V 中的最佳逼近。

定理: 若令

$$t(x) = \sum_{n=1}^{N} t_n \phi_n(x),$$

則

$$\|f - Pf\|_{L^2(a,b)} \le \|f - t\|_{L^2(a,b)}$$

而等式成立若且唯若

$$f_n = t_n, \quad 1 \le n \le N。$$

證明: 由 f_n 的定義,

$$\int_a^b f\bar{t}\,dx = \sum_{n=1}^{N} \bar{t}_n \int_a^b f\bar{\phi}_n\,dx = \sum_{n=1}^{N} f_n\bar{t}_n。$$

再由 $\{\phi_n\}$ 的正則性,

$$\begin{aligned}\|t\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b t\bar{t}\,dx \\ &= \sum_{n,m} t_n\bar{t}_m \int_a^b \phi_n\bar{\phi}_m\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2。\end{aligned}$$

如此得到

$$\begin{aligned}&\|f-t\|^2_{L^2(a,b)} \\ =&\int_a^b |f|^2 - f\bar{t} - \bar{f}t + |t|^2\,dx \\ =&\|f\|^2_{L^2(a,b)} - \sum_{n=1}^{N} f_n\bar{t}_n + \bar{f}_n t_n - |t_n|^2 \\ =&\|f\|^2_{L^2(a,b)} - \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |f_n - t_n|^2。\end{aligned} \tag{5}$$

所以 $\|f-t\|_{L^2(a,b)}$ 最小的可能就是當 $f_n = t_n$ 的時候, 也就是 $t = Pf$ 的時候。

令 (5) 式中的 $f_n = t_n$。則

$$\begin{aligned}0 &\le \|f - Pf\|^2_{L^2(a,b)} \\ &= \|f\|^2_{L^2(a,b)} - \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2。\end{aligned}$$

再令 $N \to \infty$ (如果有那麼多 $\phi_n(x)$ 的話), 則得到所謂的 Bessel 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b f(x)\bar{\phi}_n(x)\,dx \right|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2\,dx。 \tag{6}$$

一個簡單的推論是, 如果 $\{\phi_n(x)\}$ 是一組正則集合, 則

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\bar{\phi}_n(x)\,dx = 0。 \tag{7}$$

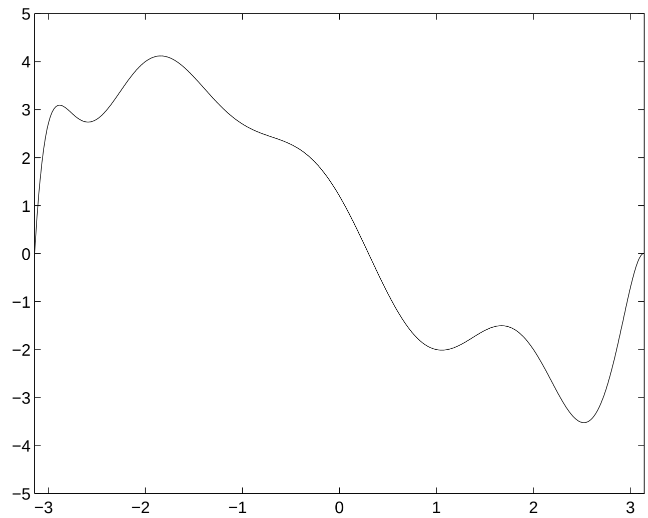
五. 低頻與高頻

由 (7) 式得知 $\lim f_n \to 0$; 也就是說當 $|n|$ 很大的時候, $|f_n|$ 很小。但是, 用 (1) 式的角度來看, f_n 和 f_{-n} 實際上是組成 $a_{|n|}$ 和 $b_{|n|}$ 的值。現在我們暫時只看 (1) 式和 $n > 0$ 的情形。a_n 和 b_n 分別是 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 的係數, 這時候 n 是這兩個波形的頻

率。這也就是說, 當 n 大的時候, a_n 和 b_n 代表了 $f(x)$ 的“高頻”分量; 或說, $f_{\pm n}$ 是 $f(x)$ 的高頻分量。那麼以上的數學敘述, 就是說一個 2π 週期函數一定可以被整數頻率的正餘弦波展開而且高頻的分量一定很小。

這個“高頻分量很小”的現象, 除了在數學辨證中看得出來, 也可以有直覺的認識。假想一個 $f(x)$, 在 $[-\pi,\pi]$ 中如圖二。

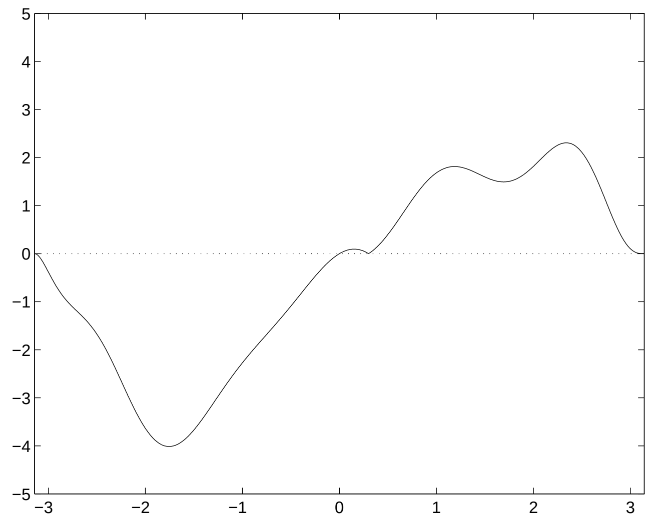
$f(x)$



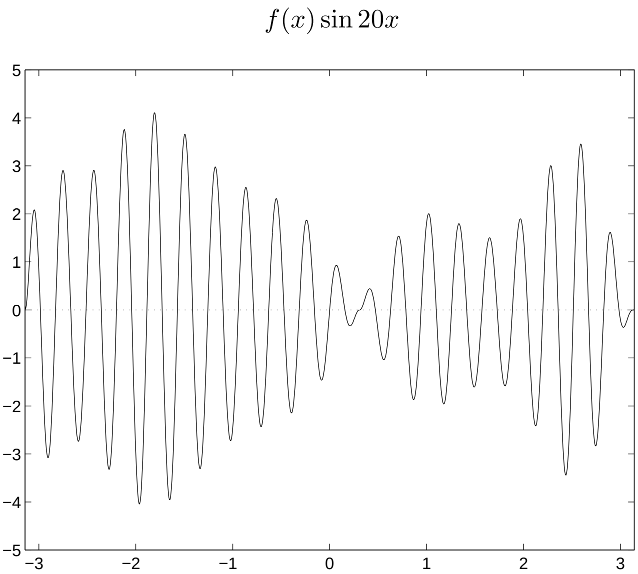
圖二

則 $f(x)\sin x$ 繪於圖三而 $f(x)\sin 20x$ 繪於圖四。

$f(x)\sin x$



圖三 $f(x)\sin x$。



圖四 $f(x)\sin 20x$。

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$ 是圖三中y軸上方的面積減去下方的面積, 數值大約是-2.5203。$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 20x\, dx$ 則是圖四中的面積差, 由圖可見上下部份幾乎互相消去, 所以應該很小; 大約是 0.0516。

六. Parseval 定理

Parseval 定理基本上就是說, 在三角級數的情況下, Bessel 不等式的等號成立。考慮 $L_p^2(-\pi,\pi)$ 上的正則集合 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, 若 $f\in L_p^2(-\pi,\pi)$, 定義其三角多項式展開爲

$$\mathcal{F}_N(f,x)=\sum_{n=-N}^{N} f_n e^{inx},\quad \text{其中}$$
$$f_n=(f(x),e^{inx})_T\text{。}$$

而 Fourier 級數則爲

$$\mathcal{F}(f,x)=\lim_{N\to\infty}\mathcal{F}_N(f,x)\text{。}$$

當 $|f_n|<\infty$, 我們就說 $f(x)$ 可以作三角多項式展開。假設 $f\in L_p^2(-\pi,\pi)$, 使得 $|f_n|\le \|f\|_T\|e^{inx}\|_T=\|f\|_T$。但這個假設其實太強了一點, 只要 $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx<\infty$, 也就是說 $f\in L^1(-\pi,\pi)$, 就可以有

$$|f_n|\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,|e^{-inx}|\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx<\infty\text{。}$$

但是, 如果 $f(x)$ 只是在 $L^1(-\pi,\pi)$, 我們並沒有一個類似 Parseval 的理論保證 $\mathcal{F}_N(f,x)$ 的收斂性。甚至可以找到一個 (病態的) 例子, 使得 $\lim_{N\to\infty}\mathcal{F}_N(f,x)$ 在每一點 x 都發散。

Parseval 定理: 依上述符號,

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-\mathcal{F}_n(f,x)\|_T=0, \qquad (8)$$

而且

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2=\|f(x)\|_T^2\text{。} \qquad (9)$$

如果 $g(x)\in L_p^2(-\pi,\pi)$, $\mathcal{F}(g,x)=$

$\sum g_n e^{inx}$, 則

$$(f,g)_T=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\bar{g}_n。\tag{10}$$

證明: 給定任意的 $\epsilon>0$。我們利用兩個未經證明的結果。第一, 存在一個連續函數 $h(x)\in C(-\pi,\pi)$, $h(-\pi)=f(-\pi)=f(\pi)=h(\pi)$ 而且 $\|f-h\|_{L^2(-\pi,\pi)}<\epsilon$。可以拓展 $h(x)\in L^2_p(-\pi,\pi)$。第二, 如果 $h(x)$ 是一個連續的 2π 週期函數, 則存在一個三角多項式 $P(x)$ 使得

$$|h(x)-P(x)|<\epsilon,\quad \forall x\in[-\pi,\pi]。$$

(參見後面的逐點收斂定理。)

由 $\|\cdot\|_T$ 的定義, 得到 $\|h-P\|_T<\epsilon$。假設 $P(x)$ 的階數是 N_0。由於 $\mathcal{F}_n(h,x)$ 是 $h(x)$ 的最佳三角多項式逼近, 故

$$\|h-\mathcal{F}_N h\|_T\le\|h-P\|_T<\epsilon,\ \forall N>N_0。$$

又由 Bessel 不等式,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_N f-\mathcal{F}_N h\|_T&=\|\mathcal{F}_N(f-h)\|_T\\&\le\|f-h\|_T\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f-h\|_{L^2(-\pi,\pi)}\\&<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\epsilon。\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|f-\mathcal{F}_N f\|_T&\le\|f-h\|_T+\|h-\mathcal{F}_N h\|_T\\&\quad+\|\mathcal{F}_N h-\mathcal{F}_N f\|_T\\&<(1+\frac{2}{\sqrt{2\pi}})\end{aligned}$$

因爲 ϵ 是任意正數, 故得 (8)。

由 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}&|\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_N f\,\bar{g}\,dx|\\&\le\int_{-\pi}^{\pi}|f-\mathcal{F}_N f|\,|g|\,dx\\&\le\|f-\mathcal{F}_N f\|_{L^2(-\pi,\pi)}\|g\|_{L^2(-\pi,\pi)}。\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 得到

$$\begin{aligned}(f,g)_T&=\lim_{N\to\infty}(\mathcal{F}_N f,g)_T\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f_n(e^{inx},g)_T\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\bar{g}_n。\end{aligned}$$

故得 (10)。把 g 換成 f 就得 (9)。

七. Gibbs 現象

但是 Parseval 定理說的是 L^2 模之下的平均收斂。這並不代表對每一個點 $x\in[-\pi,\pi]$, 我們的三角級數都會逐點收斂, 也就是:

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-\mathcal{F}_n(f,x)|=0$$

如果 $f(x)$ 在某點 x_0 不連續, 但是 $f(x_0^\pm)=\lim_{x\to x_0^\pm}f(x)$ 存在而且 $f(x)$ 在 x_0 兩側附近均平滑。則 $\mathcal{F}_N(f,x_0)$ 將收斂到

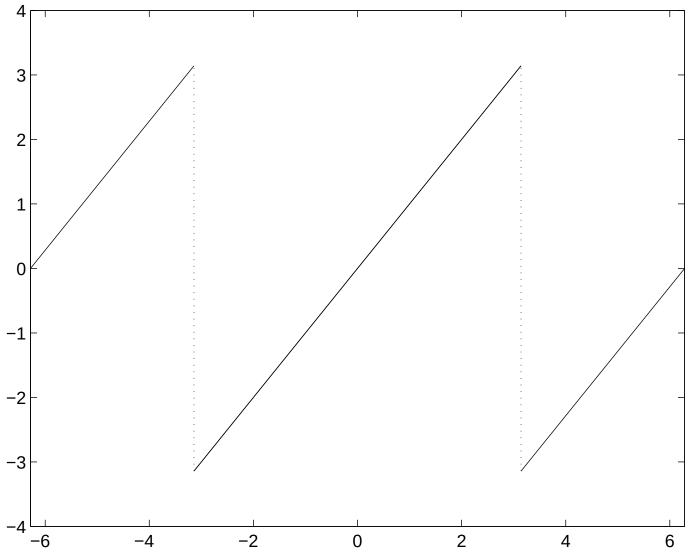
$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}。\tag{11}$$

更有趣的現象是, $F_N(f,x)$ 在 x_0 的兩側都有射過頭的部份。這一部份的"寬度"隨著 N 變大而變窄, 但是它們的"高度"卻大約是個常數。根據 Parseval 定理, $F_N f$ 還是收斂到 $f(x)$, 在 L^2 模的意義之下。這是一個非常著名的現象, 稱作 Gibbs phenomenon。

雖然這個現象事後被發現曾經出現於 1848 年的一篇文章 "On a certain periodic function" 之中, 作者是劍橋三一學院的數學家 Wilbraham。但今人一般還是把這個現象的發現與解釋歸功於兩篇分別於 1898 和 1899 年刊在美國 Nature 雜誌上的文章。

在 1898 年提出這個觀察現象的是美國的物理學家 Michelson (1852–1931)。他在 1892 年出任剛成立的芝加哥大學物理系的第一位系主任。因爲他測定光速以及證明以太 (ether) 不存在, 使他獲得 1907 年的諾貝爾物理獎。當時, 在自動計算機的發展歷史上, 處於機戒類比型的時代。在 1880 左右, 英國的物理學家 Lord Kelvin 利用類比積分器發明了一種稱作 Harmonic Analyzer 的計算機。它的功能是可以依據輸入的 $f(x)$ 圖形計算其三角多項式係數; 也就是, (1) 式中的 a_n 和 b_n。當時被用在對海潮的研究上, 所以又有個名字叫 tidal harmonic analyzer。這種機器一直到二次大戰期間還在使用。在 1897 年間, Michelson 設計了一些技術, 使得這種 Harmonic Analyzer 可以算出更高項的 Fourier 係數; 起先是 20 項, 最後是 80 項。他帶著這個機器參加 1900 年在巴黎舉辦的世界博覽會, 得了首獎。

從這個計算機的輸出, Michelson 觀察到以下這個現象。令 $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi)$, 並拓展成一個 2π 週期函數, 如圖五。顯然 $f(x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 不連續。我們

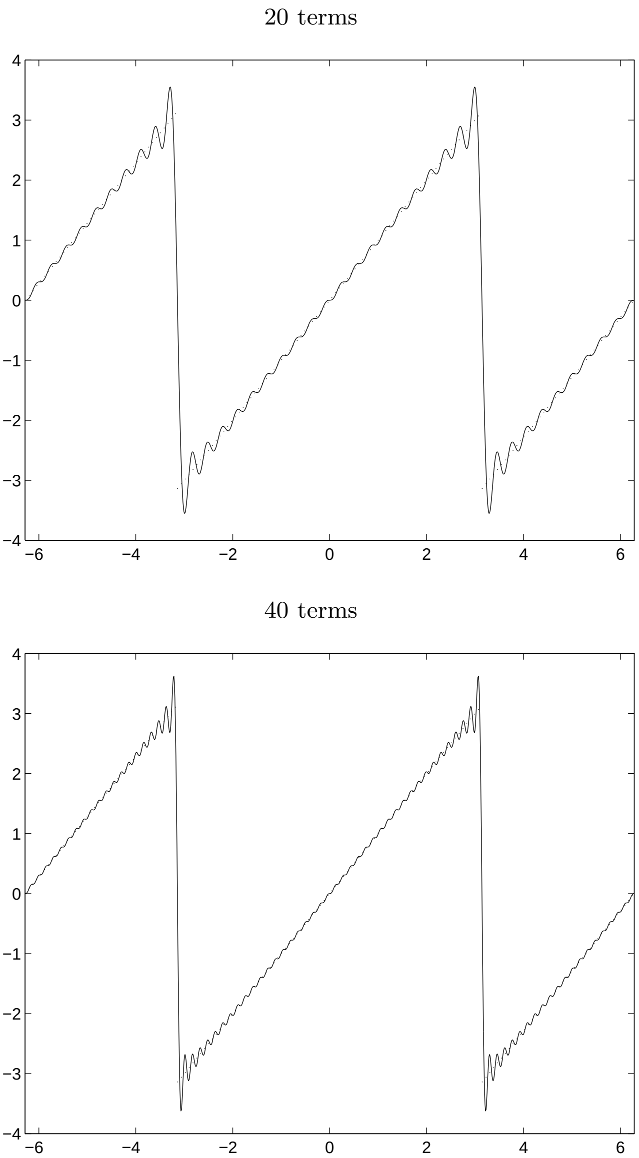


圖五

只看 $-\pi$ 和 π 兩點就可以了。根據 Euler 早就已經知道的等式,

$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx。$$

($f(x)$ 是個奇函數。) 但是, 不論是 $n = 20$ 或 $n = 40$, $\mathcal{F}_n(f, x)$ 看起來好像都會射過頭一點點, 而且過頭的程度好像不會隨著 n 變大而改善。我們用 Matlab 的浮點計算重造這兩個例子, 如圖六。但是當時 Michelson 的計算機的精確度只有三五個有效數字, 製圖的功能也很原始。他觀察這個超射的部份大約是常數 0.56。



圖六 Gibbs phenomenon

雖然這個現象是由此特例觀察到的, 但是只要 $f(x)$ 有不連續的部份, 它就普遍性地出現。

1899 年, Gibbs (1839–1903) 回應了 Michelson 的發現。Gibbs 被譽爲十九世紀美國最偉大的數學物理學家。他證明了, 上述的 $\mathcal{F}_n(f,x)$ 在 $(2k+1)\pi$ 附近的最大值減最小值趨近於

$$4\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx。$$

而上下超射的部份各是

$$2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx-\pi\approx 0.562281。$$

爲了算式上的方便, 我們不完全跟隨 Michelson 和 Gibbs 的脚步來深究這個現象。我們取一個比較方便的 2π 週期函數 $f(x)=\pi-x$, $x\in[0,2\pi)$。這個 $f(x)$ 在 $x=2k\pi$ 時不連續。$f(x)$ 還是個奇函數, 故 $a_n=0$。前面說的所有有關 $L_p^2(-\pi,\pi)$ 的理論和計算, 都可以移到 $L^2(0,2\pi)$。因爲

$$\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2\pi}{n}$$

(用部份積分技巧), 得

$$\mathcal{F}_N(f,x)=2\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}。$$

明顯地, $\mathcal{F}(f,2k\pi)=0$。令 $g_N(x)=\mathcal{F}_N(f,x)-f(x)$。則

$$\begin{aligned}g_N'(x)&=2\sum_{n=1}^{N}\cos nx+1=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}\\&=D_N(x)。\end{aligned}$$

根據習題 (4), $g_N(x)$ 在 0 的右邊第一個相對極值出現於

$$x_N=\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}},$$

而 $g_N(x)$ 的另一個表示式是

$$g_N(x)=g_N(0)+\int_0^x\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx。$$

而在 0 右邊超射部份的極限將是

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}g_N(x_N)\\&=\lim_{N\to\infty}\int_0^{x_N}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx-\pi\\&=\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{1}{2}(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}})}\frac{1}{N+\frac{1}{2}}\,d\theta-\pi\\&=\int_0^\pi 2\frac{\sin\theta}{\theta}\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}})}{\sin\frac{1}{2}(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}})}\,d\theta-\pi\\&=2\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta-\pi。\end{aligned}$$

從 Gibbs phenomenon 我們看到, 若 $f(x)$ 不連續, 則 $\mathcal{F}(f,x)$ 不會逐點收斂。那麼是不是對連續函數就會逐點收斂呢? 差不多了, 只要沒有趨近於垂直的切線, 例如 $x^{\frac{1}{3}}$ 在原點附近。下一個定理給了一個逐點收斂的充分條件。

八. 收斂定理

逐點收斂定理: 若 $f(x)$ 是一個連續的 2π 週期函數。對某個 x, 若存在常數 $\delta>0$, $M<\infty$, 使得對所有的 $h\in(-\delta,\delta)$,

$$|f(x+h)-f(x)|\le M|h|。$$

則

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{F}_N(f,x)=f(x)。$$

證明: 利用 Dirichlet kernel,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N(f,x)&=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt\;e^{inx}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{n=-N}^{N}e^{in(x-t)}\,dt,\end{aligned}$$

故

$$\mathcal{F}_N(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt。\tag{12}$$

當 $|t|\in(0,\pi]$, 令

$$g(t)=\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}},\tag{13}$$

任意令 $g(0)=0$。由 $f(x)$ 的性質, 知道 $g(t)$ 也是 2π 週期函數。而且, 因爲 $|g(t)|$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有界, 由此推知 $|g(t)|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界。

由於 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\,dt=1$, 故

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_N(f,x)-f(x)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\,dt\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_N(t)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(N+\frac{1}{2}t)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}(g(t)\cos\frac{t}{2})\sin Nt\,dt\\&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}(g(t)\sin\frac{t}{2})\cos Nt\,dt\Big\}。\end{aligned}$$

由於 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin Nt$ 和 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos Nt$ 是 $L^2(-\pi,\pi)$ 上的一組正則集合, 由於 (7), 所以上式中最後的兩個積分項都隨著 $N\to\infty$ 而 $\to 0$。故得證。

第 (12) 式中型如 $\int f(x-y)g(y)\,dy$ 的積分稱爲 f 和 g 的折積 (convolution)。記作 $(f\star g)(x)$。這種積分, 和它的離散型式:

$$\sum_n \alpha_{k-n}\beta_n$$

都有許多奇妙的應用。我們已經熟悉的是多項式的乘法。若

$$\begin{aligned}f(x)&=\alpha_n x^n+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0,\\g(x)&=\beta_m x^m+\cdots+\beta_1 x+\beta_0。\end{aligned}$$

則

$$(fg)(x)=\sum_{k=0}^{m+n}\gamma_k x^k,$$

其中

$$\gamma_k=\sum_{n=0}^{k}\alpha_{k-n}\beta_n。$$

若我們把 (α_n), (β_n) 和 (γ_n) 寫成無窮長的數列, 但只有有限多項非零, 則

$$(\gamma_n)=(\alpha_n)\star(\beta_n)。$$

上面那個定理同時說明了 Fourier 級數有一種局部性。也就是說, 即使 $\mathcal{F}f$ 和 $\mathcal{F}g$ 在某一段區間 (a,b) 內收斂到同一個函數, 它們在 (a,b) 之外仍可以收斂到不同的函數。這個性質和指數級數 (power series) 是不同的。兩個指數級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n$$

若在某一段區間 (a,b) 內收斂到同一個函數, 則

$$\sum(\alpha_n-\beta_n)x^n=0,\quad x\in(a,b)。$$

由導函數值可見 $\alpha_n=\beta_n$, $\forall n$。所以 $\sum\alpha_n x^n$ 和 $\sum\beta_n x^n$ 全然相等 (只要收斂了)。

這種局部性, 也可以由圖一看出來。雖然 (4) 式中 $f(x)$ 的 Fourier 係數 f_n 都不是零函數的係數 ($f_n \neq 0$), 但是在 $[-\pi, -\frac{1}{4}]$ 之間 $f(x) = 0$。而且 $f(x)$ 顯然滿足 Fourier 級數逐點收斂之條件。所以它的 Fourier 級數在 $[-\pi, -\frac{1}{4}]$ 之間將收斂到零函數。

最後, 我們討論什麼時候 $\mathcal{F}_N(f,x)$ 會收斂到平均值 (11)。假設 $f(x)$ 是個 2π 週期函數, 在 $(-\pi,\pi)$ 之間存在有限多個點 $x_1 < \ldots < x_N$, 使得 $f(x)$ 在 $(-\pi, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_N, π) 之間是可微函數。而且, 在這些開區間之內, $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在區間兩端點的單邊極限值均存在。這樣的函數我們簡稱爲分片平滑的 2π 週期函數。

平均點收斂定理: 若 $f(x)$ 是個分片平滑的 2π 週期函數, 定義 $f(x\pm) = \lim_{t\to x^\pm} f(t)$。則

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N(f,x)\\ &= \frac{f(x-)+f(x+)}{2}。\end{aligned}$$

證明: 由於 Dirichlet kernel $D_N(x)$ 是個偶函數而且 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f(x-) &= \frac{1}{2\pi}f(x-)\int_0^\pi D_N(t)\,dt,\\ \frac{1}{2}f(x+) &= \frac{1}{2\pi}f(x+)\int_{-\pi}^0 D_N(t)\,dt。\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_N(f,x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x-t)-f(x-)]D_N(t)\,dt\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 [f(x-t)-f(x+)]D_N(t)\,dt。\end{aligned}$$

然後如 (13), 定義

$$g_\pm(t) = \frac{f(x-t)-f(x\pm)}{\sin\frac{t}{2}}。$$

仿效上面逐點收斂定理中的技巧可完成此證明。

—本文作者任教於國立中央大學數學系—