談惠更斯級數

蔡聰明

在數學史上, 微積分發明之前, 無窮級數的出現, 最重要的里程碑有下列四端:

甲. 阿基米得級數

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$$

這是阿基米得 (Archimedes, 287-212 B. C.) 求算拋物弓形面積時, 所產生的一個無窮等比級數, 它可以說是歷史上第一無窮級數。這個級數顯然收斂到 $\frac{4}{3}$。

乙. 調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

在1350年左右, N. Oresme (約1323-1382) 證明了調和級數發散, 這是歷史上第一個發散級數的例子。

丙. 二項級數

$$(1+x)^\alpha={}_\alpha C_0+{}_\alpha C_1 x+{}_\alpha C_2 x^2+{}_\alpha C_3 x^3+\cdots$$

其中 α 爲一個實數並且

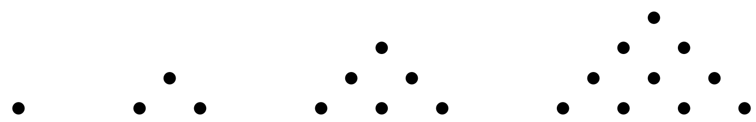
$${}_\alpha C_k=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

從1664年冬天到1666年, 共兩年之間, 由於歐洲流行黑死病, 牛頓 (Newton, 1642-1727) 由劍橋大學回鄉下老家避難, 研讀 Wallis(1616-1703) 的「無窮的算術」一書, 受到 Wallis 的插値法及歸納法的啓發, 發現了上述的二項級數, 這是牛頓生平的第一個數學成果。牛頓就是由無窮級數起家, 加上運動學的考量, 發明了微積分。

丁. 惠更斯級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)/2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots \tag{1}$$

當 Leibniz (1646-1716) 在1672年於巴黎遇到惠更斯 (Huygens, 1629-1695) 時, 惠更斯拋一個問題給 Leibniz: 考慮三角形數



1 , 3 , 6 , 10 , $\cdots$

其第 n 項爲

$$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$$

試求三角形數的倒數之和, 即求 (1) 式之和。

這個無窮級數的首 n 項之部分和爲

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) \\ &= 2(1-\frac{1}{n+1}) \end{aligned} \tag{2}$$

於是 $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$, 因此 (1) 式收斂且其和爲 2。從而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1 \tag{3}$$

今日我們稱 (1) 式與 (3) 式皆爲惠更斯級數。

上述 (2) 式就是差和分的算法: 欲求和分 $\sum_{k=1}^{n} a_k$, 只要能夠找到 (b_n), 使得差分

$$\Delta b_k = b_{k+1}-b_k = a_k$$

那麼就可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k) = b_{n+1}-b_1$$

Leibniz利用差分法解決惠更斯級數的求和問題, 並且由此引出調和三角形 (又叫做 Leibniz 三角形), 乃至一般的差和分學, 再將差和分對函數施展, 作連續化, 就得到微積分。這是一個偉大的發現歷程, 詳情參見 [6]。

因此, 惠更斯級數是生出微積分的一個重要胚芽。德國數學家 Hilbert (1862-1943) 說:「做數學的要訣在於找到那個特例, 它含有推展到普遍性的所有胚芽。」惠更斯級數就是這種特例。

根據數學史 [4]與 [5]的說法, 由於惠更斯與 Hudde 討論某個賭局 (game of chance) 的機率計算, 才產生惠更斯級數。遺憾的是, 其詳情在機率論史的文獻中已不可考。本文我們展示一些跟惠更斯級數有關的數學問題, 也許可以補足這個缺憾。

一、排列與組合

由排列、組合與重複組合的公式可知

$${}_{n+1}P_2/2 = {}_{n+1}C_2 = {}_nH_2$$

我們可以利用圖表來說明, 它們都等於三角形數 $\frac{n(n+1)}{2}$。考慮從 $n+1$ 個物件中任取兩個出來作排列與組合。將 $n+1$ 個物件編號爲 $1,2,\ldots,n+1$, 再列出下表:

	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	$\cdots$	(1,n)	(1,$n+1$)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	$\cdots$	(2,n)	(2,$n+1$)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	$\cdots$	(3,n)	(3,$n+1$)
$\vdots$				$\cdots$		
n	(n,1)	(n,2)	(n,3)		(n,n)	(n,$n+1$)
$n+1$	($n+1$,1)	($n+1$,2)	($n+1$,3)	$\cdots$	($n+1$,n)	($n+1$,$n+1$)

因爲排列計較順序, 故只需扣掉對角線的元素個數

$$(n+1)^2-(n+1)=n(n+1)={}_{n+1}P_2.$$

就是排列數; 組合不計較順序, 所以打對折就得到組合數

$$\frac{{}_{n+1}P_2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}={}_{n+1}C_2.$$

另一方面, 從 n 個物件中任取 2 個之重複組合數爲上表中三角形內的元素個數

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}={}_nH_2.$$

因此, 惠更斯級數就是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_nH_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{n+1}C_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{{}_{n+1}P_2}\text{。}$$

二、平面幾何

先觀察畢氏定理的一個應用:

命題1: 兩圓相切, 半徑分別爲 r_0 與 r_1, 並且跟 x 軸切於同側, 切點爲 A_0 與 A_1, 如圖1, 則

$$\overline{A_0A_1}^2=4r_0r_1 \tag{4}$$

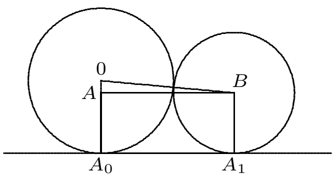


圖1

證明: 在直角三角形 ΔOAB 中

$$(r_0+r_1)^2=\overline{A_0A_1}^2+(r_0-r_1)^2$$

展開化簡立得 (4) 式。

命題2: 在圖2中, 兩圓與 x 軸之間又內切一個圓, 其半徑爲 r_2, 則

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_0}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}} \tag{5}$$

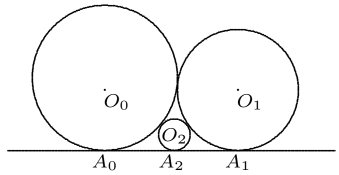


圖2

證明: 由命題1知,

$$\overline{A_0A_1}^2=4r_0r_1$$
$$\overline{A_0A_2}^2=4r_0r_2$$
$$\overline{A_2A_1}^2=4r_2r_1$$

又由

$$\begin{aligned}\overline{A_0A_1}^2&=(\overline{A_0A_2}+\overline{A_2A_1})^2\\&=\overline{A_0A_2}^2+\overline{A_2A_1}^2+2\overline{A_0A_2}\cdot\overline{A_2A_1}\end{aligned}$$

所以

$$4r_0r_1=4r_0r_2+4r_1r_2+2\cdot2\sqrt{r_0r_2}\cdot2\sqrt{r_1r_2}$$

整理化簡就得到 (5) 式。

命題3: 如圖3, 不斷地作內切圓 O_2, $O_3,\ldots,$ 下去, 半徑爲 $r_2,r_3,\ldots,$ 則

$$r_n=(\frac{n-1}{\sqrt{r_0}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}})^{-2}, n=2,3,\ldots, \tag{6}$$

證明: 由命題2知

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_0}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_0}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{2}{\sqrt{r_0}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{r_4}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}+\frac{1}{\sqrt{r_0}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{3}{\sqrt{r_0}}$$
$$\cdots\cdots$$

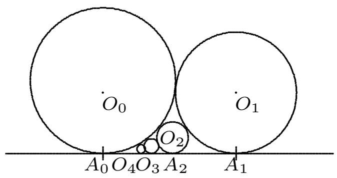


圖3

由此看出 $(\frac{1}{\sqrt{r_n}})_{n=2,3,4,\ldots}$ 爲一個等差數列, 公差爲 $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$。於是

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{n-1}{\sqrt{r_0}}$$

從而

$$r_n=(\frac{n-1}{\sqrt{r_0}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}})^{-2}。$$

推論: 特別地, 如果圓 O_0 與 O_1 的半徑皆爲 1, 則

$$r_n=\frac{1}{n^2} \text{ 且 } \overline{A_nA_{n+1}}=\frac{2}{n(n+1)} \qquad (7)$$

從而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2 \qquad (8)$$

證明: 由 (6) 式知

$$r_n=(\frac{n-1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}})^{-2}=\frac{1}{n^2}$$

又由 (1) 式知

$$\overline{A_nA_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}=\frac{2}{n(n+1)}。$$

我們注意到, (8) 式可以由幾何圖形直觀地看出來, 也可以採用下面圖4的「無言的證明」(proof without words)。

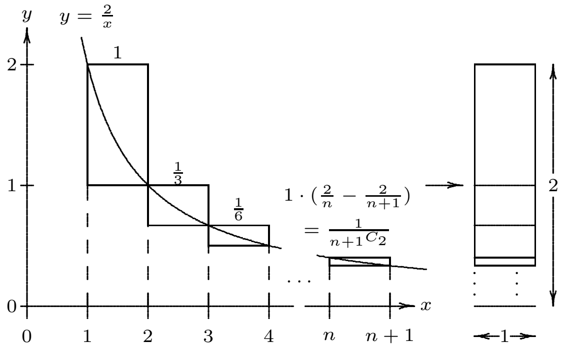


圖4

命題4: 在圖5中, 兩圓 C_1 與 C_2 的半徑皆爲 1, 相切 P 點, 並且切於 x 軸。在兩圓與 x 軸之間作一系列的內切圓 O_1, O_2, $O_3\ldots$, 設其半徑爲 r_1, r_2, $r_3,\ldots$, 直徑爲 $d_1,d_2,d_3,\ldots$, 並且令 $S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n$, 則

$$d_1=S_1=\frac{1}{2} \text{ 且 } d_{n+1}=\frac{(1-S_n)^2}{2-S_n} \qquad (9)$$

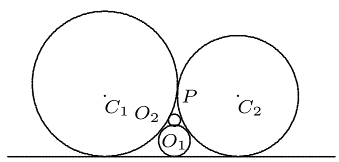


圖5

證明: 由 (3) 式知 $d_1=S_1=\frac{1}{2}$。又由畢氏定理知

$$(1+r_{n+1})^2=1^2+[1-2(r_1+\cdots+r_n)-r_{n+1}]^2$$

於是

$$\begin{aligned}&4r_{n+1}[1-(r_1+\cdots+r_n)]\\&=[1-2(r_1+\cdots+r_n)]^2\end{aligned}$$

從而

$$d_{n+1} = \frac{(1-S_n)^2}{2-S_n}。$$

推論: 在命題4的假設下, 我們有

$$d_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ 且}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1。$$

習題: 在圖6中, 兩圓 C_1 與 C_2 的半徑分別爲 r_1 與 r_2, 相切, 並且切於 x 軸。在兩圓與 x 軸之間作一系列的內切圓 $O_1, O_2, O_3, \ldots$, 設其半徑爲 $r_1, r_2, r_3, \ldots$。試證

$$\frac{1}{r_n} = 2n\sqrt{\frac{1}{r_1 r_2}} + n^2(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}),$$
$$\forall n = 1, 2, 3, \ldots。 \quad (10)$$

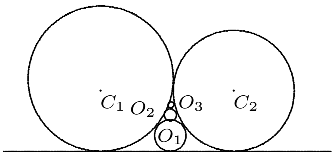


圖6

三、微積分

在微積分中, 經常出現如下的「望遠鏡法」(telescoping method) 求級數和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 \quad (11)$$

對此式我們何以作一個有趣的幾何解釋: 考慮一族曲線

$$y = x^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

它們將單位正方形分割成無窮多個領域, 例如 $y = x^{n-1}$ 與 $y = x^n$ 在區間 [0,1] 上所圍成的面積爲

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}dx - \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

再兩邊求和就得到 (11) 式。參見圖7。

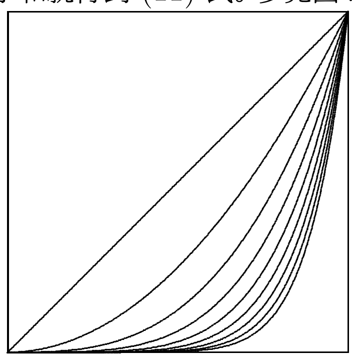


圖 7

Jakob Bernoulli (1654-1705) 利用惠更斯級數, 判別 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 之收斂: 因爲

$$\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n(n+1)}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$$

因此,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \quad (13)$$

收斂且其和小於 2, 但求不出和來。一直等到1734年, 才由 Euler(1707-1783) 求得和爲 $\frac{\pi^2}{6}$。

四、機率論

重覆且獨立地丟一個公正的銅板, 這叫做 Bernoulli 試驗。令 A_n 表示第 n 次出現正面的事件, 則 (A_n) 爲一列獨立的事件並且 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$。由 Borel-Cantelli 補題知

$$P(A_n, i.o.) = 1$$

亦即不時地 (infinitely often, i.o.) 出現正面的機率爲 1。從而, 至少出現一次正面的機率也是 1。

今考慮每一次丟銅板出現正面的機率皆不同, 令其爲 $p_1, p_2, p_3, \ldots$, 這叫做 Poisson 試驗。我們要問: 在什麼條件下, 至少出現一次正面的機率爲 1?

顯然, 由 Borel-Cantelli 補題知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, 則至少出現一次正面的機率爲 1。如果我們假設 $0 \le p_n < 1$, 則反過來也成立。因爲

$$\begin{aligned}
&\text{至少出現一次正面的機率爲 } 1\\
\Leftrightarrow\ &\text{永不出現正面的機率爲 } 0\\
\Leftrightarrow\ &\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty
\end{aligned}$$

這最後一步需要用到 $0 \le p_n < 1$ 的條件。

定理: 在 Poisson 試驗之下, 若 $0 \le p_n < 1$, 則下列三個敍述等價:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\, P(\text{不時地出現正面}) = 1,\\
&\text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty,\\
&\text{(iii)}\, P(\text{至少出現一次正面}) = 1。
\end{aligned}$$

特別地, 取 $p_n = \frac{1}{n+1}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$。於是

$$P(\text{至少出現一次正面}) = 1.$$

這恰是 Huggens 級數:

$$\begin{aligned}
&P(\text{至少出現一次正面})\\
&= \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{3}\\
&\quad +(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\frac{1}{4} + \cdots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1。
\end{aligned}$$

順便一提, 在機率論中, 要舉一個期望值不存在的隨機變數, 最簡單的辦法是考慮隨機變數 X, 取值

$$X = n \text{的機率爲 } \frac{1}{n(n+1)},\ n = 1, 2, \ldots$$

則期望值爲

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty \tag{14}$$

這個隨機變數 X, 出現於下面的機率問題。考慮一個甕 (Urn), 裝有一個白球與一個黑球。作隨機實驗如下:

(i) 任意取出一球。如果是白球, 則終止實驗。如果是黑球, 則放回, 並且再加一個黑球到甕裡。然後繼續從甕中任意取出一球。

(ii) 不斷地重複 (i) 的步驟。

一直等到取出白球爲止, 試求取球次數的期望值。

上述隨機實驗的樣本空間爲

$$\Omega = \{w, bw, b^2w, \ldots, b^{n-1}w, \ldots\}$$

每一樣本點的機率爲

$$\begin{aligned}
P(w) &= \frac{1}{2} \\
P(bw) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \\
P(b^2w) &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P(b^{n-1}w) &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

定義取球次數的隨機變數 X 爲

$$X(w)=1, X(bw)=2, \ldots$$
$$X(b^{n-1}w)=n, \ \cdots$$

於是 X 的期望值就是 (14) 式。

下面我們再看一個 Huggens 級數自然地出現的機率問題。

考慮一個隨機變數 X, 代表玉皇大帝提供給人間的命運。假設人們排成一隊, 從時刻 $0,1,2,\ldots$ 一個接著一個來抽取命運, 得到隨機樣本 $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$, 它們獨立且同佈 (i.i.d.)。$X_0$ 代表某甲的壞運, $X_1, X_2, \ldots$ 代表甲周圍親友的壞運。從心理的觀點來看, 甲發生不幸後, 要等到周圍有人發生更大的不幸才得到安慰。亦即諺語所說的「壞運永不會變成好運, 直到更壞的事情發生」(Bad is never good until worse happens)。如果我們用

$$N=\min\{n : X_n > X_0\}$$

來代表甲等待至得到安慰的等待時間, 則 $P(N>k)$ 表示在隨機變數 $\{X_0, X_1, \ldots, X_k\}$中, X_0 是最大項。由對稱性 (i.i.d.) 可知

$$P(N>k)=\frac{1}{k+1}$$

於是

$$\begin{aligned}
P(N=n) &= P(N>n-1)-P(N>n) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}, n=1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

我們稱隨機變數 N 具有 Huygens 分佈, 它的期望值 $E(N)=\infty$。因此, 平均起來甲要等待無窮長的時間才得到安慰。這叫做「壞運的持久性」或「壞運的詭論」(the ill-luck paradox)。

最後我們介紹一個跟連分數 (continued fractions) 有關的例子。取機率空間 (Ω, $\mathcal{F}$, P) 爲 Lebesgue 空間, 亦即 $w=(0,1]$, $\mathcal{F}$ 爲 (0,1]中的 Lebesgue 可測集全體, P 爲 Lebesgue 測度。對於每一個 $\omega\in\Omega$, 作連分數展開

$$\omega=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}}$$

定義隨機變數

$$\xi_n(\omega)=a_n, n=1,2,3,\ldots$$

則每一個 ξ_n 皆取值 $1,2,3,\ldots$, 並且

$$\begin{aligned}
P(\xi_1=k) &= P\left(\frac{1}{k+1}<\omega\le\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{k(k+1)} \qquad (15)
\end{aligned}$$

因此, 隨機變數 ξ_1 依從 Huygens 分佈。在這個模型之下, 還可以證得許多美妙的結果, 請參考 Kac [2]與 Barone& Novikoff [3]。事實上, 這是 Borel 開拓機率論的一個重要特例。

五、結語

總結上述, 我們看出惠更斯級數是一個很美妙的數學胚芽, 當初 Leibniz 曾由它走入差和分學天地, 並且進一步加以連續化, 而導致微積分的誕生。

對於這麼重要的特例, 值得我們從各種角度來觀照它。我們發現, 在組合學、平面幾何學、微積分與機率論之中, 都有惠更斯級數的足跡。特別地, 它在微積分與機率論的發展史上佔有很特殊的地位。

我們應隨時注意或找尋這一類含有深意的具體特例, 發掘它的豐富根基, 然後由此切入, 走到一般理論的領域, 這大概就是數學的發展與學習之道吧。

參考文獻

1. Pedoe, A course of Geometry for colleges and Universities, Cambridge Univ. Press, 1970.
2. Kac, Statistical Independence in Probability, Analysis and Number theory, Carus Mathematical Monograph 12, 1955.
3. Barone and Novikoff, A History of the Axiomatic Formulation of probability from Borel to Kolmogorov, part I, Arch. Hist. Exact Science, 18, 123-190, 1978.
4. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 1968.
5. Edwards, The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, 1979.
6. 蔡聰明, Leibniz 如何想出微積分? 數學傳播, 第十八卷第三期, 1994。
7. 深川英俊& Pedoe, 日本の幾何, 何題解けますか? 森北出版株式會社, 1991。

—本文作者任教於台大數學系—