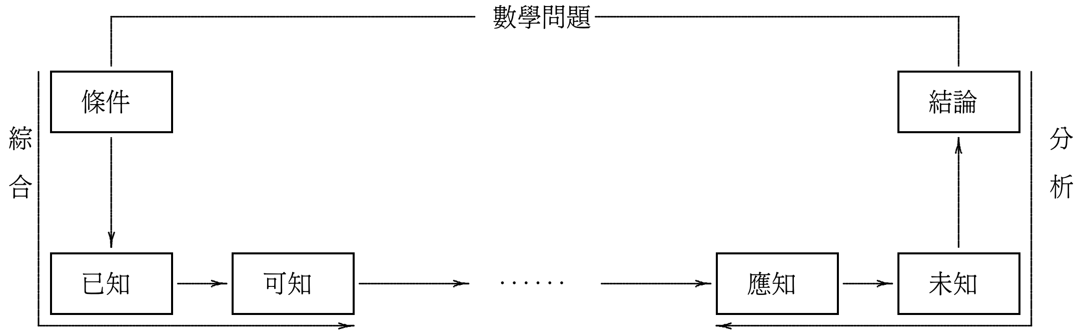
處理數學問題的若干思考

殷堰工

數學題目成千上萬, 可謂浩如煙海。雖有許多數學方法可資利用, 但這些方法分解到個別題目上, 有時會顯得力不從心, 無能爲力, 這就是所謂的解題沒有通則了, 必須具體問題作具體分析了, 特別是對一些非常規的數學問題, 諸如數學競賽題, 這一點就表現得尤爲突出了。那麼, 如何從漫無頭緒的題目中, 運用已有的知識理出一條頭緒來, 這是擺在每個解題者面前的一個嚴峻課題。本文結合自己的研究 (主要是 G. polya 的三部經典著作及我的恩師徐利治教授的「數學方法論」) 和擔任數學奧林匹克學校兼職教練的解題實踐, 談些認識和看法, 也作爲我的解題心得體會的一種總結與回顧。

(一) 分析與綜合

分析與綜合是以兩個不同方向探索解題思路的思維形式。前者執果溯因, 後者由因尋果, 均爲處理問題的基本方法。用框圖表示其因果關係和邏輯聯係如下:



下面我們以例子說明之。

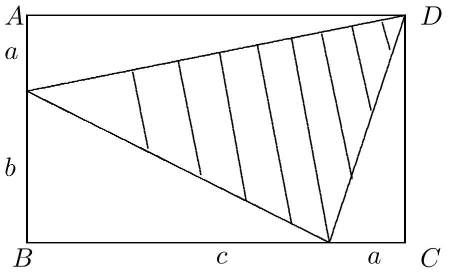
個例1: 設n爲正整數, 則 2^{n+4} 與 2^n 的個位數相同。

思考: 兩個數的個位數相同$\Leftarrow$ 兩個數的個位數之差等於零 $\Leftarrow$ 兩個數之差的個位數等於零。至此, 目標明確, 下面的證法自然形成。事實上, $2^{n+4}-2^n=2^n(2^4-1)=2^n\cdot 15=2^{n-1}\cdot 2\cdot 15=2^{n-1}\cdot 30$ 即知 2^{n+4} 與 2^n 的個位數相同。

個例2: 設 a,b,c,d 是正數, 證明: 存在

一個三角形, 它的邊長等於 $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, 它的面積是 a,b,c,d, 的有理式。

思考:　本題可以運用證明兩數之和大於第三數, 兩數之差小於第三數的方法。考慮到結論要的是 "存在", 即構造出來就行了。從三條邊長的式子結構入手, 發現它們都具有 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 的形式, 即 $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd} = \sqrt{a^2+(c+d)^2}$, $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ad} = \sqrt{(a+b)^2+d^2}$ 於是想到直角三角形的勾股弦關係來處理。下面的圖形便是符合本題要求的。其面積爲 $(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}(a+b)d-\frac{1}{2}(c+d)a$



圖一

上述兩道從思考過程來看, 例1是分析法的典例, 例2則是分析與綜合雙向溝通的結果。

(二) 分解與合成

一個比較長的因果鏈, 總是由幾個因果構成的。一個比較複雜的問題, 同樣也是由若干個基本的小問題所組成。數學問題的求解過程, 實質上是由一個或幾個推理過程組成的。把一個複雜的問題分解成一系列有一定邏輯關係的小問題, 再由這些小問題的逐一求解合成爲複雜問題的解, 乃是一種行之有效的思考方法。請看下面的一個題目。

個例 3:　求方程$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}$ 的實數根, 其中 m、n 是正奇數。

思考:　第一步:　顯然, $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, 方程可變形爲 $\frac{1}{\cos^m x} - \cos^n x = \frac{1}{\sin^m x} - \sin^n x$

由 m、n 爲正奇數知 $\cos x$ 爲正, 於是左邊爲正, 從而 $\sin x$也須爲正; $\cos x$爲負, 左邊爲負, $\sin x$ 也須爲負。即 $\sin x$ 與 $\cos x$ 必須同號: $\sin x\cdot\cos x > 0$

第二步: 現在離解答還甚遠, 既求不出 $\sin x$, 也求不出 $\cos x$ 來。那麼, 不妨退而求之, 看看它們之間的大小, 即考慮　$\sin x > \cos x$, $\cos x > \sin x$, $\sin x = \cos x$ 三種情況。

如若 $\sin x > \cos x$, 由 $\sin x$ 與 $\cos x$ 同號且 m、n 爲正奇數得 $\sin^n x > \cos^n x$, $\sin^m x > \cos^m x$ 或 $\frac{1}{\cos^m x} > \frac{1}{\sin^m x}$。於是, $\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} > \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}$。

由此, 我們發現, 在本題條件下, $\sin x > \cos x$ 是不可能的。同理, $\cos x > \sin x$ 也是不可能的。

第三步: 求方程 $\sin x = \cos x$ 的實數解。這是一個三角方程的最基本題目, 容易求解了。

這種步步爲營, 上樓梯式的處理方法對於一些難題來說, 無疑有著獨特的作用。

(三) 特殊與一般

問題的特殊性寓於一般性之中。就數學問題而言, 特殊情形下的結論, 有時往往是解決一般情況的橋梁和先導, 僅以一例示之。

個例4: 求 n 個互不相同的自然數, 使它們的倒數和爲 $\frac{1}{n!}$。

思考: 設 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n!}$ 合乎條件。記左邊各分數的公分母爲A, 則 $\frac{1}{x_i}=\frac{a_i}{A}(i=1,2,\ldots,n)$ 於是 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{a_1}{A}+\frac{a_2}{A}+\cdots+\frac{a_n}{A}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{A}=\frac{1}{n!}$ 顯然, 取 $A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)n!$ 就可達到預期的目的。

問題是 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 如何選取。最簡單的辦法莫過於取 $a_1=1, a_2=2,\ldots, a_n=n$, 於是, 在這種合乎題意的原則下, 有$a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。由此知, 應取 $A=\frac{1}{2}n(n+1)n!=\frac{1}{2}n(n+1)!$, 這樣,

$$x_i=\frac{A}{i}=\frac{n(n+1)!}{2i}\ (i=1,2,\ldots n)$$

顯然, A 中包含 $1,2,\ldots,n$ 爲其因數, 故x_i 確是互不相同的自然數, 且滿足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{n!}$。

(四) 數式與圖表

數與形是數學的兩大支柱, 圖形或表格的直觀性能幫助對題目的理解, 激發創造思維的火花。反之, 代數方法的滲透也爲解題思路的得到推波助瀾。這種數形結合的思想方法在解數學題時, 實在是必不可少的。

個例5: 求不等式組

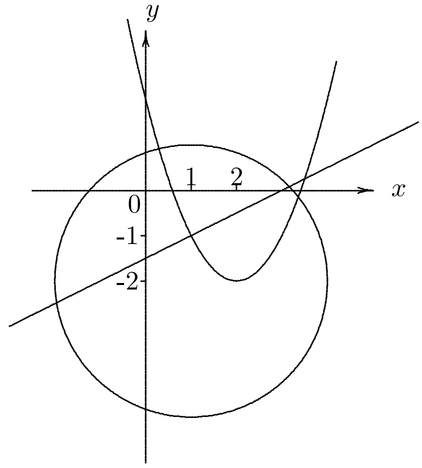
$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y<4 \\ x^2-4x-y+2\le 0 \\ 2y-x+3\ge 0 \end{cases}$$

的整數解

思考: 原不等式組比較複雜, 先整理成

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2<3^2 \\ y\ge (x-2)^2-2 \\ y\ge \frac{x}{2}-\frac{3}{2} \end{cases}$$

從形式來看, 這是由一個圓, 一條拋物線和一條直線組成的, 不妨將圖作出 (圖二), 由圖, 不等式組的解爲圓的內部, 拋物線的上方和直線的上方部分。由此可見, 此區域內僅有四個整數點, $(1,0),(2,0),(3,0),(1,-1)$。至此, 答案已有。

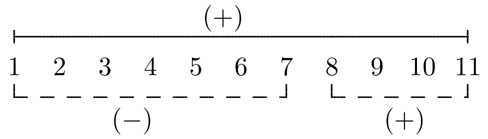


圖二

個例6: 在一個有限實數列中, 任意連續的七項之和爲負, 任意連續的十一項之和爲正, 試確定此數列最多有幾項?

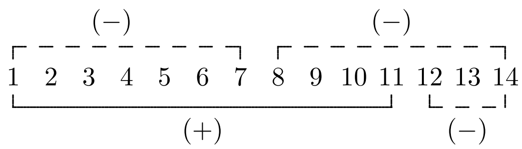
思考: 本題的數列依題意只涉及有限多項, 題目的條件究竟會使數列受到什麼限制, 我們借助於圖來探索。

(i) 各項和的正負如下圖



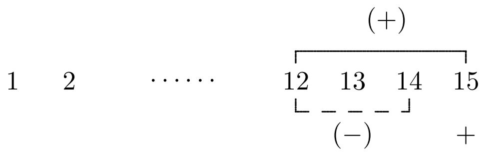
由圖可見, 從第八項以後任何連續四項之和均爲正;

(ii) 從第十二項以後如下圖



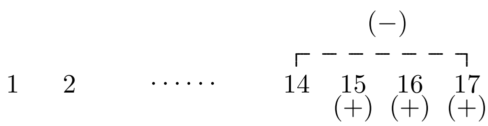
由圖可見, 從第十二項以後任何連續三項之和均爲負;

(iii) 繼續考慮第十四項以後的項如下圖



可從第十五項起, 任一項都爲正。

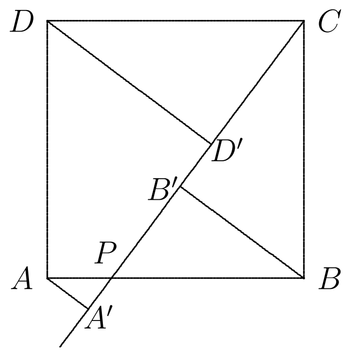
(iv) 第十五項以後最多只能再有一項, 如圖



由圖可見, 如有十七項以上, 則十五、十六、十七項都爲正數, 但其和爲負數, 矛盾!

綜上, 這個數列最多有十六項, 例如: 5,5, −13,5,5,5,−13,5,5,−13,5,5,5,−13,5,5 這個數列即合所求。

個例 7: 過正方形 ABCD 的頂點 C 作一與 AB 相交的直線, 交點爲 P, 作 $AA'\perp CP$ 於 A', $BB'\perp CP$ 於 B', $DD'\perp CP$ 於 D', 若 BB' 是 AA'、DD' 的比例中項, 則P 必是線段 AB 的黃金分割點。(如圖三)



圖三

思考: 顯然 $DD' > BB' > AA'$, $AP < PB$。欲證 P 是線段 AB 的黃金分割點, 須證 $PB^2 = AP\cdot AB$。如果令 $AA' = x, DD' = y$, 則 $BB' = \sqrt{xy}$

此時 $\frac{AP}{PB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{x}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ 這時就無法再進行下去了。怎麼辦? 細觀圖形, 易知

$$\frac{AA'}{AP} = \frac{BB'}{PB} = \frac{DD'}{DC} = \frac{AA'+BB'}{AP+PB}$$

這是因爲 $DC = AB = AP + PB$ 得到 $DD' = AA' + BB'$, 即 $y = x + \sqrt{xy}$, 解此方程得 $\frac{x}{y} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 於是 $\frac{AP}{PB} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 問題得以解決。

(五) 等效與反證

當命題 $A \Rightarrow B$ 難以正面入手時, 根據互爲逆否命題的等效性原理, 往往可試從反面間接處理, 證明 $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, 這種思考方法實際上是反證法的一種重要形式。由於作

爲數學證明大法的反證法早已爲大家所熟悉, 故僅舉一例, 以見一斑。

個例8: 已知多項式 x^3+bx^2+cx+d 的係數都是整數, 且$bd+cd$ 是奇數, 證明: 該多項式不能分解成兩個整係數多項式的乘積。

思考: 命題的結論證明“不能”, 結論不十分明確, 不好直接證明, 因而考慮反證這一間接的思路。而題設條件爲 $bd+cd$ 是奇數, 又暗示了用數的奇偶性來導出。

如果假設 x^3+bx^2+cx+d 能分解爲二個整係數多項式的乘積, 則必定一個是一次多項式, 一個是二次多項式, 不妨設

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r) \quad (*)$$

其中 p,q,r均爲整數。

由 $bd+cd$ 爲奇數知 $(b+c)d$ 爲奇數, 故 $b+c$ 與 d 均爲奇數。

但$(*)$式是關於 x 的恆等式, 故對於 x 取一切實數都成立。特別地, 令 $x=0$ 得 $d=pr$。

由 d 是奇數得 pr 是奇數, 故 p 與 r 均爲奇數, 再令 $x=1$ 代入$(*)$式中得

$$\text{左邊}=1+b+c+d\text{爲奇數}$$

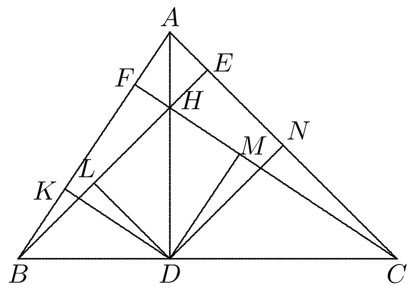
$$\text{右邊}=(1+p)(1+q+r)$$

由 $1+p$ 是偶數知右邊爲偶數, 由此得出了奇數等於偶數的矛盾等式。從而知假設不成立, 因此原命題成立。

(六) 模式與機遇

模式就是在解答多種形式的數學習題時可以適用的模範程式, 數學發展至今, 產生了許多行之有效的解題模式, 如 Polya 把 Descartes 的萬能方法概括成的 Descartes 模式, 徐利治教授發明的關係·映射·反演模式等等。這些模式在解題時能給予有益的指引, 減少盲目性。

個例9: 設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心, D、E、F 爲三高的垂足。自 D 分別作 AB、BH、CH、CA 的垂線, 其垂足分別爲 K,L,M,N。求證: 此四點共線。



圖四

思考: 爲簡化問題, 取 D 爲坐標原點, DC, DA 分別爲 x 和 y 軸。設 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$。於是, 可列出原像圖形中十條直線在映像系統中所相應的十個一次方程式。只需求解各對一次聯立方程, 便可求得各點坐標爲 $N(\frac{a^2c}{a^2+c^2}, \frac{ac^2}{a^2+c^2})$, $K(\frac{a^2b}{a^2+b^2},\frac{ab^2}{a^2+b^2})$, $M(\frac{b^2c}{a^2+b^2},-\frac{abc}{a^2+b^2})$, $L(\frac{c^2b}{a^2+c^2},-\frac{abc}{a^2+c^2})$, 這些點的坐標分別滿足三點共線條件

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2c}{a^2+c^2} & \frac{ac^2}{a^2+c^2} & 1 \\ \frac{a^2b}{a^2+b^2} & \frac{ab^2}{a^2+b^2} & 1 \\ \frac{b^2c}{a^2+b^2} & -\frac{abc}{a^2+b^2} & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\text{和} \quad \begin{vmatrix} \frac{a^2c}{a^2+c^2} & \frac{ac^2}{a^2+c^2} & 1 \\ \frac{a^2b}{a^2+b^2} & \frac{ab^2}{a^2+b^2} & 1 \\ \frac{c^2b}{a^2+c^2} & -\frac{abc}{a^2+c^2} & 1 \end{vmatrix}=0$$

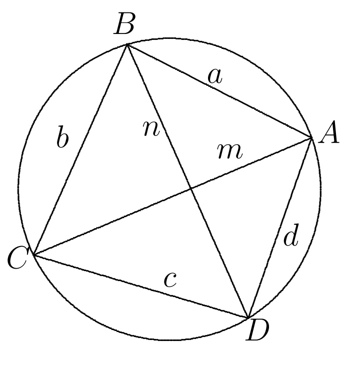
這兩個代數關係式的幾何解釋是 N, K, M 共線和 N, K, L 共線, 故結論是 N, K, M, L 四點共線。

以上程序是應用關係·映射·反演的標準模式, 用框圖表示就是:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{幾何關係問題}} \arrow[r, "\text{映射(解析表示)}"] \arrow[d, "\text{課題目的}"] & \boxed{\text{代數關係問題}} \arrow[d, "\text{代數計算}"] \\ \boxed{\text{確定某種幾何關係}} & \boxed{\text{求出某些代數關係}} \arrow[l, "\text{反演(翻譯回去)}"] \end{tikzcd}$$

模式是個十分有用的解題工具, 但絕非萬能。有些問題, 若硬要去湊配模式, 反倒繁難, 這就有一個一般的模式與特殊情況下的機遇的辯證關係問題。所以會有這樣的狀況, 既反映了自然界的多樣性, 也是因爲許多問題原本就是人們一拼一湊編湊出來的緣故。

個例 10: 如圖五, 圓的內接四邊形 ABCD, 四邊 AB, BC, CD, DA 的長分別爲 a, b, c, d, 對角線 AC, BC 的長分別爲 m、n, 求證: $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{n}{m}$



(圖五)

思考: 令圓半徑爲 R, 四邊形面積爲 S, 能夠列出

$$\begin{cases} n = 2R\sin A & (1) \\ m = 2R\sin B & (2) \\ S = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B & (3) \\ S = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin A & (4) \end{cases}$$

現在要消去四元 S、R、A、B, 卻只多了三個方程, 似乎還少一個。但只要$[(1)\times(3)]\div[(2)\times(4)]$ 這樣一算, 結論很快就出來了, 這就是一個機緣!

(七) 移植與雜交

聯想和類比是基本的數學方法, 解題離不開它們。通過聯想類似問題、類似形式、類似解法, 由類比推理將之轉化, 而後移植到所遇到的問題上, 乃是思考問題的又一條途徑, 與之相應地可拓寬聯想面, 把其它學科的定理、法則、方法用到我們的數學問題上, 達到雜交的目的, 這種有意識的索取, 也是優化解題的一個有效手段。

個例 11: 設單位立方體內有任意的九個點, 證明其中至少存在兩個點, 它們間的距離不大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

思考: 這是一個空間問題, 聯想到平面的類似問題“設單位正方形內有任意的五個點, 證明其中至少存在兩個點, 它們間的距離不大於 $\frac{\sqrt{2}}{2}$”。解決這個平面問題, 其實也就解決了原來的空間問題, 只要把證明方法移植過來即可。下面我們不妨對之證一下。

把單位正方形均分成四個邊長爲 $\frac{1}{2}$ 的小正方形。由於單位正方形內有五個點, 因此在四個小正方形中, 至少有一個小正方形內含有這五個點中的兩個點。注意到小正方形的對角線長爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 於是位於同一個小正方形內的兩個點之間距離一定不大於 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(八) 變化與發展

現代數學最重要的特點就是把運動和變化的觀點引進數學。因此, 用變化發展的觀點來認識數學問題, 是一種更高層次的處理數學問題的手段。下面的一例可作明示。

個例12: 兩圓內切於 P, 外圓的弦 AB 切內圓於 C, 求證: $\angle APC=\angle BPC$。

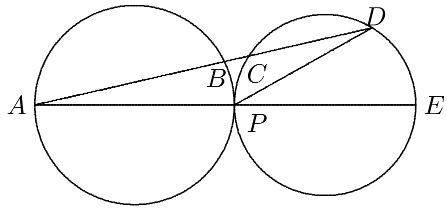
思考: 本題證明並不難, 只要引出公切線就行了, 但它可作如下變化:

變化一: 若 PA, PB 交內圓於 D, E, 則 $DE//AB$, $\frac{PA}{PB}=\frac{PD}{PE}$, $\frac{PD}{PE}=\frac{AC}{BC}$。

變化二: 若AB爲內圓的割線, 且AB和內圓交於D, E, 則$\angle APD$與$\angle BPE$ 有何關係?

變化三: (1) 若兩圓外切於P, 一圓的切線 AC (C 爲切點) 和另一圓交於 A, B, 則 PC 爲 $\angle APB$ 的外角平分線。

(2) 兩圓外切於P, 過一圓上一點 A 作另一圓的割線APE, $ABCD$, 問$\angle BPC$ 與 $\angle DPE$ 有何關係?



(圖六)

變化四: 如兩圓相交, 結論爲何?

如此變化, 無疑使得原本一道簡單的題目變得豐富多彩, 發展了其內涵和外延, 達到了以一當十的效果。

最後, 還想說幾句作爲本文的結語。上面所談僅是處理數學問題的一般思考方法, 解題是無止境的, 對於一些特殊的技巧, 這裡未加涉及, 只能另文專述了。但需要指出的是解題是個細水長流的工程, 也有待於廣大讀者在大量的練習、訓練中神而化之, 此乃作者之主旨。

—本文作者任教於江蘇省蘇州市教育學院數學系—