解題漫談

單墫 • 王子俠

學數學, 必須解題。

解題, 不僅鞏固、復習所學的知識, 而且可以培養能力: 運用所學知識解決問題的能力。學數學而不解題, 如入寶山空手而返。

問題千變萬化, 可以分爲兩大類, 一類是有固定套路遵循的, 另一類沒有固定的套路, 因而需要較多的創造性。後一類問題, 在各種數學競賽中經常出現, 我們著重談談這類問題。

這類問題沒有固定的解法, 需要自己去探索。探索中有兩點最值得注意:

一、從簡單、具體、特殊的情況入手, 通過對它們的研究, 熟悉問題, 發現規律。

二、大膽猜測。“先猜後證, 這是大多數的發現之道”。

請看一個例題:

已知銳角三角形 ABC, 點A_1, A_2取在邊 BC 上 (A_2在A_1與 C 之間), B_1, B_2在邊 AC 上 (B_2在B_1與 A 之間), C_1, C_2在邊 AB 上 (C_2在C_1與 B 之間), 使得

$$\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = \angle BB_1B_2 = \angle BB_2B_1 = \angle CC_1C_2 = \angle CC_2C_1 \quad (1)$$

直線AA_1, BB_1, CC_1圍成一個三角形, 直線AA_2, BB_2, CC_2圍成另一個三角形。證明這兩個三角形的六個頂點X, Y, Z, U, V, W 共圓。

要證明六點共圓, 至少有兩個辦法。一是利用四點共圓的定理證明四點共圓, 再證明其它點也在這個圓上。另一種辦法是證明有一個點到這六個點的距離均相等。這兩個辦法都行得通。我們採用後一種, 因爲它不但能證明六點共圓, 而且還給出了圓心。

問題是這個圓心在哪裡?

這個圓心多半是$\triangle ABC$ 的一個特殊點, 可能是外心, 內心, 重心或垂心, 當然也可能不是這些點, 如果畫一個比較準確的圖 (圖 1), 或許你會發現這個圓心應當是$\triangle ABC$的垂心。怎樣畫圖, 我們留到後面再說。即使圖不容易畫得準確, 也可以通過簡單的特例發現圓心是垂心 H。爲此, 畫一個瘦長的等腰三角形 ABC(我們不要正三角形, 因爲正三角形的外心, 內心, 重心, 垂心是同一點), $AB = BC$, 而且就取 $A_1 = B, A_2 = C$(圖 2), 這時爲使 (1) 成立, B_1應與C重合, C_2應與B重合, 而且

$$\angle BB_2C = \angle CC_1B = \angle ABC = \angle ACB \quad (2)$$

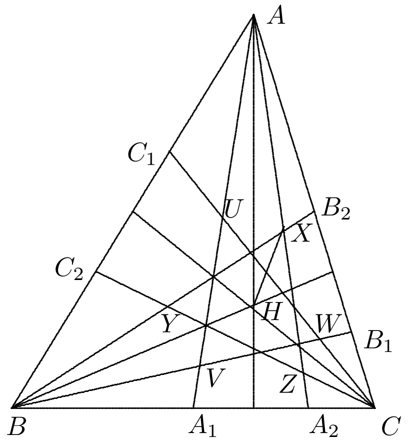

圖1

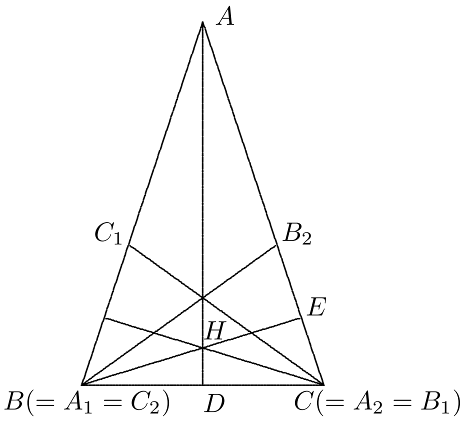

圖2

因爲 U, V, W, X, Y, Z 分別與 B, C, C_1, B_2, B, C 重合, 所以實際上只要證明 B, C, B_2, C_1 四點共圓, 這由 (2) 立即得出。

我們看一看圓心在哪裡? 如果圖足夠瘦長, 那麼這圓心顯然不是 $\triangle ABC$ 的重心與外心, 也不是內心 ($\angle CBA$ 的平分線在 $\angle B_2BA$ 內)。不難證明它是 $\triangle ABC$ 的垂心 H: 因爲 $\triangle ABC$ 高 AD 是 BC 的垂直平分線, 另一條高 BE 正好是等腰三角形 BCB_2 的底邊 CB_2 的垂直平分線, 所以 H 就是 $\triangle BCB_2$ 的外心。同理也是 $\triangle BCC_1$ 的外心, 即 H 爲 B, C_1B_2, C_1 四點 (U, V, W, X, Y, Z 六點) 所在圓的圓心。

即然在特殊情況中, H 是所求的圓心, 那麼在一般情況中, 也應如此, 即H 到 U, V, W, X, Y, Z 這六點的距離應當相等。這一大膽的假設 (猜想), 需要小心的求證。

爲此, 我們應當算一下 HX 的長。

回到圖1。記 $\angle AA_1A_2$ 爲 α。因爲 $AH\perp BC$, 所以, $\angle A_2AH = 90^\circ - \alpha$。同理, $\angle B_2BH = 90^\circ - \alpha$。於是 H, X, A, B 四點共圓。設 d 爲這個圓的直徑, 則由正弦定理

$$HX = d\sin\angle A_2AH = d\cos\alpha。$$

同樣由正弦定理,

$$d = \frac{AB}{\sin\angle AHB} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \angle ACB)} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}.$$

從而 d 也就是 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑。

同理, HY、HZ、HU、HV、HW 也都等於 $d\cos\alpha$。於是 X、Y、Z、U、V、W 六點共圓, 並且圓心是 $\triangle ABC$ 的垂心 H , 半徑是 $d\cos\alpha$, d 是 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑。

最後, 我們說一下如何作出較爲準確的圖。角是比較難作的, 但 $\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1$ 等價於 $AA_1 = AA_2$, 所以, 以 A 爲圓心畫弧交 BC 於 A_1、A_2, 那麼 $\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1$, 就成立了, B_1 怎麼作? 因爲 $\angle BB_1B_2 = \angle AA_2A_1$, 所以 A_2, B_1, A, B 四點共圓, 即 A_2B_1 與 AB (關於 BC、AC) 逆平行。如果作出 $\triangle ABC$ 的高 AD, BE, CF (只要有三角板, 這很容易

作), 那麼熟知 DE 與 AB (關於 BC, AC) 逆平行, 所以 $A_2B_1//DE$。只要過 A_2 作 DE 的平行線與 AC 相交, 便得到 B_1。再在 CA 上取 B_2, 使 $EB_2 = B_1E$, 過 B_2 作 EF 的平行線交 AB 得C_1, 最後在 AB 上取 C_2, 使$FC_2 = C_1F$ (圖3)。

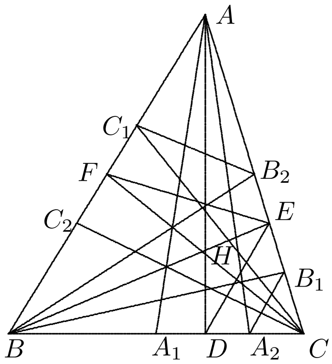

圖3

既然我們的作圖與 $\triangle ABC$ 的高密切相關, 那麼所求的圓心, 捨 H 其誰?

猜到圓心是 H, 證明便不太困難, 所以學會猜測是很重要的。

作者簡介:

單墫教授爲中國大陸首批國產博士之一 (1983), 專長爲數論。在研究之餘, 並擔任各種數學競賽之訓練及輔導工作多年。1989及1990年兩屆世界數學競賽 (IMO), 中國隊均榮獲世界冠軍, 單博士分別擔任副領隊及領隊之職。單教授曾任教於中國科技大學, 目前爲南京師範大學數學系正教授。單博士著作等身, 包括"國際數學競賽解題方法"等數學叢書廿餘冊。

王子俠教授, 畢業於台大數學系 (1965), 1971年加拿大英屬哥倫比亞大學數學博士。研究領域爲數論及組合學。對解題 (Problem Solving) 有濃厚之興趣。曾擔任加拿大數學競賽委員會委員 (1989-1997), 並在 1992-1995年間, 擔任委員會主席之職。目前爲滑鐵盧 (Waterloo) 偉佛羅利亞 (Wilfrid Laurier University) 大學數學系正教授。