

談數學競賽

徐正梅

(一) “問題”是數學的生命

法國著名數學家傅立業 (J. Fourier 1768 ~ 1830) 說：「數學的主要目的是大眾的需要和自然現象的解釋」。的確，數學是我們生活中用以說明數量、形狀，是大眾所需的計算工具；數學又是探求、認識、刻畫自然規則的一門科學。

1980年代，世界數學的潮流以「問題解決」為發展的主軸，數學脫離了「問題」就失去多采的生命，因此數學問題乃是這門學科的核心。如何提出問題？如何解決問題？成為教育中重要的一環。

16、17世紀，有些數學家喜歡提出有趣的問題，向人類的智慧挑戰。費馬(Fermat 1601~1665) 是法國的律師，業餘醉心於數學的研究，他曾提出一個著名的問題：

證明方程式： $x^4 + y^4 = z^4$ 沒有正整數解 費馬本人用自己得意的方法——無窮遞降法解決這個問題，他又提出更一般性的結論：

在整數 $n \geq 3$ 時，方程式 $x^n + y^n = z^n$ 沒有正整數解。

這就是費馬大定理。費馬在古希臘數學家Diophantos 著作的一冊譯本裡寫道：自己發現了證明這個問題的妙法，祇是書頁的空白處不夠大，無法記下證明。結果費馬至死

都未提出他的妙法，這個群賢束手的大難題遂又名費馬最後定理。三個世紀來，它困惑了許多傑出的數學家，懸盪360年，終於在1993年6月，被美國普林斯頓高等研院的英國數學家魏爾斯(Andrew Wiles) 在劍橋一個數學討論會上宣佈解決，震撼了數學界，加上媒體的報導，成為全球矚目的焦點。後來證明的過程被檢視出一些瑕疵，魏氏及其學生再經14個月的努力，終於補全了長達130餘頁的證明，1994年9月19日，費馬最後定理終被人類的智慧征服。魏爾斯接受訪問時說：「解決這個問題，確實有一種自由的感覺，在過去八年中，我過度投入這個問題，無論是清晨醒來或夜晚入睡，這個問題總是縈繞於心，如今漫長解題之旅已了，我心如止水」。解決費馬最後定理，固然可以在數學史上留名，但背後為了解決這個難題，歷代的數學家投入的研究、築塔式地取得許多額外的成果，帶動了數學分支的發展，更具實質的意義！

(二) 數學競賽

近代，世界各國風行中學生數學競賽，它是一種解題的比賽，試題的內容一般都不超出中學課程所涵蓋的範圍：

(1) 數論 (2) 數列 (3) 多項式

(4) 不等式 (5) 幾何 (6) 組合數學
偶而也有一些問題是高等數學的背景，融入了中學數學的思想方法，以通俗有趣的形式呈現，每一道試題，都沒有固定的模式可套，學生必須自己去探索、嘗試、通過觀察、分析、思考……去發現一線曙光，慢慢找到解題的門徑。有的試題，依據題設條件，從正面去想，浩瀚如海，茫無頭緒，此時從反面切入就較易得手；有的試題，需用“類比”的方法，從自己較熟悉的類比題去推敲；有的試題，必須透過“轉換”的手法化成另一個問題，纔易於入手；有的試題，需要有高度的創造性去構造一個輔助函數，方能湊功……總之，數學競賽的試題具備了

開放性、靈活性、探索性

三項特色，讓資優的中學生可以在這個鬥智的舞台上揮灑個人的才華。

建國高中，去年十二月堂堂邁入建校一百週年，在台灣地區是一所古老中學，更是一所聚集菁英學子的名校。春風吹放自由花，培育了一批批的紅樓才子，「赫赫鬢宇、髦士三千」，在全國各學科能力競賽中更是獨佔鰲頭、各領風騷。

從1983年起，建中每年辦一次全校性的數學競試，這是建中人一展長才、悠游於高度心智活動的一項大賽，已蔚成風氣，是一項別具特色的傳統。採自由報名與師長推薦兩種管道，筆試分三個階段篩選，從9月中旬延續到10月底，試題分成A、B兩卷，A卷測高一新生，B卷測高二與高三學生。

初試：考察學生對中學基礎知識的掌握情況
(各年級選出80人~100人參加複試)。

複試：考察學生運算能力、分析能力、空間能力……等(各年級選出35人~50人參加決試)。

決試：考察學生創造力，靈活應用數學知識解題的能力。

三個階段的成績按某種比例合併計分，每一個年級按總分之高低選出20人左右，由學校公開表揚並頒獎，成績優異者，建議教務處，讓學期(或學年)給予“免修數學”的優待，最後我們再從成績較優的12人中透過「口試」選出6名，代表學校參加校外數學競賽。特別值得一提的是：建中數學科的同仁，感情融洽，相處和諧，像個大家庭，其中有一群學養深厚、熱心奉獻的工作伙伴：

朱再發、林初堂、蔡聰池、江啓霖、
張文良、許建志、毛延宗、李瑞、
陳麗如、曾政清

與筆者計11人組成一個團隊，負責命題、閱卷、選拔、培訓等工作。長期以來，他們自編教材，犧牲週末假期，指導學生，春風化雨，數年如一日，他們所散發的光與熱，啟發了學生，當然，我們亦在輔導中得到“成長”並充滿了「得天下英才而教育之」的“喜悅”。

1992年，我國首次參加第33屆國際數學奧林匹克(簡稱IMO)，地點在莫斯科，6位國手中，建中學生佔了一半：

魏澤人、吳宏五、黃柏嶸

1993年第34屆IMO在伊斯坦堡(土耳其)舉行，我國取得第五名，由陳院長昭地領隊並爭取到今年(1998年)第39屆IMO的主辦權，當年6位國手中，建中佔了三位

吳宏五、單中杰、黃景沂

1994年在香港舉行，6位國手中，建中學生有兩位：

單中杰、陳和麟

1995年在加拿大舉行，6位國手中，建中學生有三位：

陳和麟、邱奕智、卓士堯

1996年在印度舉行，建中林冠明入選國手，1997年在阿根廷舉行，建中高一學生陳明揚入選國手，我們寄望今年有更多建中學生加入國手的行列，為地主國爭取最高的榮譽。

(三) 培訓工作

自從1992年我國首次參加IMO開始，筆者每一年五月~六月都參與國手的培訓工作，這是一項艱巨的任務：

1. 慎選（或自編）合適的題材。每一題都應有一個主旨，比如說透過問題介紹某種數學方法、或某種數學概念，或能拓展學生的視野...等。
2. 仔細批閱學生的答題。比如學生的
 - (1) 觀念是否清晰？
 - (2) 表達方式是否恰當？
 - (3) 邏輯推理是否出紕漏？
 - (4) 是否有其他解法？
 - (5) 可以推廣嗎？
 - (6) 學生從中學到什麼？
 - (7) 為什麼解不出來？該往那個方向想...？
3. 紓解學生的壓力

4. 培養學生「刻苦鑽研、知難而進」的解題精神。解題的成功固然取決於數學方法的選擇及數學知識的靈活運用，但必須有「知難而進」的頑強精神，方能攀登高峰。

(四) 一些感想

指導資優學生，重在“啓發”少做“長篇講解”，如果教師能審慎選擇一些合適的題材，供資優生去閱讀、思考、或不惜花好幾小時去苦苦思索一個問題，學生將從中獲益良多。在數學競賽中必須培養「勝不驕、敗不餒」的胸襟，獲勝自然會高興，但更要謙虛，方能求得最大進步。受挫了卻不需過分自責、悲傷，更不必要對自己的數學能力產生懷疑，甚至感到失望。老實說要在數學競賽中獲勝，是需要一些機運與特殊的天賦，而這種天賦對長期做研究工作卓然有成的數學家而言，不是必要的！在指定的時間內完整地答出問題，本身就是一種“限制”，這種限制常使深思長考型的人感到束手，數學中許多重大的發現（成果），並不是思維敏捷的產物，而是經過長時間靜靜思考，精雕細琢的傑作，費馬大定理的解決，不就是一個鮮活的見證嗎？因此，教師在指導學生時，以紮實根基為主，熟練基礎數學知識，並能靈活應用，掌握一些重要的數學方法，加強學生分析的能力即可。所謂「磨刀不誤砍柴工」，揠苗助長是培育人才中最忌諱的事，教師要有長遠的眼光，以學生將來的發展為培訓的首要目標，不必太過計較近利「金、銀、銅、鐵」。

—本文作者任教於建中—