關於整除性的心得

魏欽基

本文作者現就讀於省立金門高中二年級

對於任一自然數 n 而言，如果它的個位數是0，則 n^4 的個位數是0；如果 n 的個位數是異於0的偶數，則 n^4 的個位數是6；如果 n 的個位數是5，則 n^4 的個位數是5；如果 n 的個位數是異於5的奇數，則 n^4 的個位數是1。利用這些性質，我們可得到下面的整除關係。

定理： 若 n,k,l 均爲自然數，且 $k\geq 2$，則

$$10^k \mid n^k(n^{10^{k-1}\cdot 2l}-1)$$

證明： 我們用數學歸納法證明定理。先證明 $k=2$ 的情形。由分解因式可知

$$\begin{aligned} n^2(n^{20l}-1) &= n(n^{10l}+1)n(n^{10l}-1) \\ &= n^2(n^{4l}-1)[(n^{4l})^4+(n^{4l})^3 \\ &\quad +(n^{4l})^2+n^{4l}+1]. \end{aligned}$$

因爲 n 與 $n^{10l}+1$ 之中必有一個偶數，n 與 $n^{10l}-1$ 之中也必有一個偶數，故

$$4\mid n^2(n^{20l}-1).$$

如果 5 整除 n，則 $25\mid n^2(n^{20l}-1)$。若 5 不整除 n，則 n^{4l} 的個位數必為 1 或 6，於是

$$5\mid n^{4l}-1$$

且

$$5\mid (n^{4l})^4+(n^{4l})^3+(n^{4l})^2+n^{4l}+1,$$

又得到

$$25\mid n^2(n^{20l}-1).$$

所以

$$10^2\mid n^2(n^{20l}-1).$$

現設定理在 $k=p\geq 2$ 時成立，也就是說

$$10^p\mid n^p(n^{10^{p-1}\cdot 2l}-1).$$

欲證定理在 $k=p+1$ 時也成立。

令 $$T=n^{10^{p-1}\cdot 2l}=n^{5^{p-1}\cdot 2^{p-1}\cdot 2l}=(n^{5^{p-1}\cdot 2^{p-2}\cdot l})^4$$

由分解因式可知

$$n^{p+1}(n^{10^p\cdot 2l}-1)=n^{p+1}(T^{10}-1)$$
$$=n^p(T-1)n(T^9+T^8+\cdots\cdots+1)$$

由歸納法假設得到 $10^p\mid n^p(T-1)$。而 n 與 $T^9+T^8+\cdots\cdots+1$ 之中必有一個偶數。若 5 整除 n，則

$$10\mid n(T^9+T^8+\cdots\cdots+1).$$

若 5 不整除 n，則因 T 是某自然數的四次方，所以它的個位數是 1 或 6，故 $T^9+T^8+\cdots\cdots+1$ 的個位數必然是 0 或 5，於是

$$10\mid n(T^9+T^8+\cdots\cdots 1).$$

總之

$$10^{p+1}\mid n^{p+1}(n^{10^p\cdot 2l}-1),$$

因此定理在 $k=p+1$ 時成立。