三次多項式函數的眞面目

廖賀田

本文作者現就讀於師範大學數學系。他把他研究三次多項式圖形的過程詳細寫成本文。我們非常欽佩他的爲學精神。

另外，本文反映了目前我國學生的一些心理負擔。我們期待讀者諸君的熱烈討論。

——編者按

我們在高二時學到，利用坐標變換，可將複雜的二次曲線方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

標準化成爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y=cx^2 \quad 或 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

於是得知：二次曲線除了特異情形外，只有橢圓，拋物線，雙曲線三種。

不知你是否研究過三次函數

$$y=ax^3+bx^2+cx+d,\quad a\neq 0$$

的圖形？它可分爲幾種？如果我說「無論 a,b,c,d 取什麼

值，都可以利用坐標變換將它標準化成為$y=x^3$」，你相信嗎？

以下是我在高中時對這問題研究的過程與結果，希望藉此激起學弟妹們的想像力，創造力，能夠活用數學的各項定理，方法，不再死讀，死背，視數學為畏途。

（一）首先對於圖形

$$y=f(x)$$
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad a\neq 0$$

我們打算將他化簡，很自然的就想起二次函數：

$$\begin{aligned} g(x)&=ax^2+bx+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\\ &=ax_1^{\,2}+k\end{aligned}$$

如果能找到適當的 h，使得 $f(x)$ 表成 $(x-h)$ 的多項式後，二次項變成0，豈不是簡單多了嗎？（如果順便連一次項都消掉，那就更美妙了。）由綜合除法

$$\begin{array}{llll|l} a & b & c & d & h\\ & ah & bh+ah^2 & ch+bh^2+ah^3 & \\ \hline a & b+ah & c+bh+ah^2 & ;\ f(h) & \\ & ah & bh+2ah^2 & & \\ \hline a & b+2ah; & c+2bh+3ah^2 & & \\ & ah & & & \\ \hline a; & b+3ah & & & \end{array}$$

於是 $f(x)=a(x-h)^3+b_1(x-h)^2+c_1(x-h)+f(h)$

其中 $b_1=b+3ah,\qquad c_1=c+2bh+3ah^2$

只要令 $h=-b/3a$ 後，b_1 就變成 0 了。而

$$c_1=c+2bh+3ah^2=c-b^2/3a$$

我們取 $(h, f(h))$ 當作新原點，

由 $\begin{cases} x=x_1+h\\ y=y_1+f(h)\end{cases}$

原方程式變成

$$y_1=ax_1^{\,3}+c_1x_1 \qquad (1)$$

這是坐標系平移的結果，我們發現 c_1 無法因平移而消去。

（二）方程式化為$y_1=ax_1^{\,3}+c_1x_1$後，就容易畫圖了，為了方便，考慮$a>0$，將不失去一般性（$\because a<0$時，只要以 X_1 軸作一個鏡射就可考慮到）。

先設 c_1 為0，由描點法可畫出圖一；也就是由$ax_1^{\,3}$的一項，造成一個左右成原點對稱的圖形，而另外一項 c_1x_1 只不過是一條直線，我們可以把 y_1 想成是「站在 c_1x_1 的立足點上，加上 $ax_1^{\,3}$ 的作用」所造成。而圖一是「站在 $y=0\cdot x_1$（也就是X_1軸）」的特殊情形。

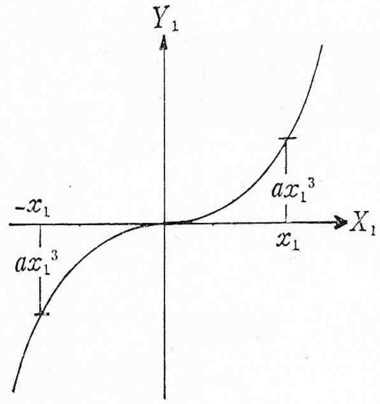

圖　一

我們先畫出 $y_1=c_1x_1$，就很容易由圖一推出 $c_1>0$ 和 $c_1<0$ 的圖形來：

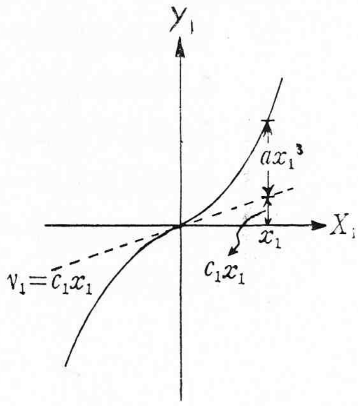

圖　二：$c_1>0$時

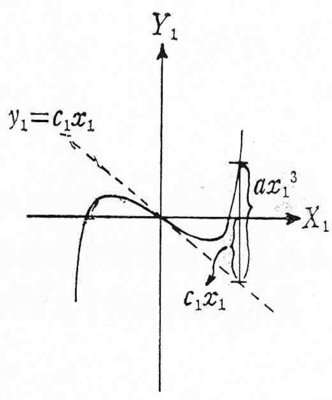

圖　三：$c_1<0$時

到這裏，我們初步的結論是，大致可分為三種，當 $ac_1<0$ 時是 S 形，$ac_1>0$ 時是拉長的$\int$形

（三）試驗旋轉發現只要稍微一轉動，方程式中 y^3, x^2y, xy^2…… 等項都出現，反而更複雜，所以不能轉。到此似乎是山窮水盡了，可是如果放棄「剛性變換」的限制，採用一般坐標系，又產生出新天地來了！

若我們取 $\tilde{e}_1=(1,\ c_1),\tilde{e}_2=(0,1)$，亦卽固定 $\overrightarrow{e_2}$ 不動，將 $\overrightarrow{e_1}$ 跟到「立足點所在」去，則由

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=c_1x_2+y_2 \end{cases}$$

發現方程式 (1) 成爲 $y_2=ax_2^3$，竟然連一次項都消掉了!

接著，再將 $\tilde{e}_2$ 作一個伸縮，取 $\tilde{\tilde{e}}_1=\tilde{e}_1,\ \tilde{\tilde{e}}_2=a\tilde{e}_2$，

由
$$\begin{cases} x_2=x_3 \\ y_2=ay_3 \end{cases}$$

得到
$$y_3=x_3^3.$$

大功告成! 能把方程式標準化到這種地步，實在是當初所意想不到的結果。到這裏， 我們知道， 三次函數只有一種，而且，只要採取適當的觀察系統，根本都是同一個函數 $y=x^3$

(**四**) 我們可以將這三步驟一次完成:

取
$$\begin{cases} \tilde{e}_1=(1,\ c_1) \\ \tilde{e}_2=(0,a) \\ 0'=(h,f(h)) \end{cases} \qquad 其中\ c_1=c-\frac{b^2}{3a},\quad h=\frac{-b}{3a}$$

由
$$\begin{cases} x=x_1+h \\ y=c_1x_1+ay_1+f(h) \end{cases}$$

直接地把 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 化成爲 $y_1=x_1^3$.

這是最後的結果,但是請注意這並非是一朝一夕作出的,這一點點結果，花掉了好幾個晚上的通宵不眠! 而且，並不是連續作出，而是想到一點，演算一陣，把結果記錄起來，過了一段時間後，偶而想到一個新意念，再演算，再記錄，重覆好多次才作成的。從一開始研究，到完成結果，足足有一年多。有時候， 演算了半天， 一無所得，也是常發生的事，但是你永遠沒法想像，當完成時心中的狂喜。事實上，對一個問題，只要累積記錄各種靈感(有的合用，有的不合用)，總有解出的一天，你願意也來親自體會這種發現的快樂嗎?

看到一些大數學家們所導出來的定理，我們常會自卑，以爲他們實在厲害，充滿了「數學細胞」。其實，有些定理，根本是窮畢生精力所得的結果，我們在一兩個小時之中，當然是證不出來，這並不表示我們的數學天賦比他們差。只要平常對數學活讀，而隨時將靈感記下，多想，多算，說不定二十年後， 你就是位有成就的數學家呢! 就算達不到那地步，在學校養成研究的習慣，也將使你終生受用不盡。