成套總測驗

羅添壽　設計

羅添壽老師現任教於省立新化高中

【說　明】

1.測驗範圍：涵蓋整個高中的數學教材內容。

2.測驗對象：供已有高三程度的學生初學或複習用。

1. （圓；多選）設 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，一點 P 之坐標爲 $(\pi/2,0)$，T、R、S 爲 C 上之三點，且 P、R、S 共線，$\overline{PT}=\sqrt{\pi^2-4}/2$ 則 (A) P在圓外 (B) $\overleftrightarrow{PT}$ 切圓 C 於 T (C) $\overline{PR}\cdot\overline{PS}=(\pi^2-4)/4$ (D) R 對於 C 之冪爲零 (E) P對於 C 之冪爲1

2. （圓錐曲線；多選）考慮方程式 $y=x/(1-x)$ 之圖形爲 G，下列何者成立？ (A) G 爲 $(x-1)(y+1)=-1$ 之圖形 (B) G 是有心二次錐線 (C) G 之中心爲原點 (D) G 之離心率 $e>1$，且焦點坐標爲 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (E) 若 $n=1000^5$，則 $G\subset\{(x,y)|x^2+y^2\leq n^2\}$

3. （切線與法線；單選）求通過點 $(0,4)$，與橢圓 $x^2/4+9y^2=72$ 相切於第一象限之切線斜率 m (A) $\sqrt{7}/2$ (B) $2/\sqrt{7}$ (C) $-\sqrt{7}/2$ (D) $-\sqrt{2}$ (E) $-1/6$

4. （參數方程式；單選）設 a、b 爲不等於 1 之正數，參數方程式

$$\begin{cases} x=\log_a b+\log_b a \\ y=(\log_a b)^2+(\log_b a)^2 \end{cases}$$

之圖形爲何？ (A) 直線 (B) 二射線之聯集 (C) 拋物線 (D) 橢圓之部份圖形 (E) 以上皆非

5. （極坐標方程式；多選）已知一橢圓之極坐標方程式爲 $r=9/(3-2\cos\theta)$ (A) 離心率 $e=2/3$ (B) $2a=$

27/5（長軸長） (C) $2b=18\sqrt{5}/5$（短軸長） (D) 二頂點之極坐標爲 $(9,0),(9/5,\pi)$ (E) 正焦弦長爲 6

6. （複數；單選）在複數平面上，$S=\{z \mid |z-4|+|z+4|\leqq 10\}$, $T=\{z \mid |z|^3-6|z|^2+11|z|-6\geqq 0\}$, $A=S\cap T$，設 S 爲任取一點之樣本空間，則事件 A 之機率 P 之值爲 (A) 1/5 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 4/5 (E) 1

7. （圓錐曲線；多選）設 $t\in\mathbf{R}$，若 $x^2-y^2-1+t(x^2+y^2-1)=0$ 表雙曲線 (A) $|t|\geqq 1$ (B) $|t|\leqq 1$ (C) $-1<t<1$ (D) 離心率 $e=2/\sqrt{1-t}$ (E) 兩焦點在 X 軸上

8. （方程式論與運算；單選）運算"$*$"之定義：$a*b=a+b-ab$，若 a、b、c 爲 $x^3-2x+1=0$ 之三根，則 $a*(b*c)$ 之值爲 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 (E) -2

9. （矩陣；多選）平面坐標上，$P(x_1,y_1)$ 繞原點 $(0,0)$ 逆時旋轉一角度 θ 後，變爲 $Q(x_2,y_2)$，例如若 $R(2,4)$ 繞 $(0,0)$ 逆時轉 90° 後得點 S，則下列何者正確？

(A) $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(B) $(x_2,y_2)=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(C) $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(D) $(x_2,y_2)=(x_1,y_1)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(E) $S(-4,2)$

註：選擇項 (A)、(B)、(C)、(D) 中之括號爲矩陣符號。

10. （圓錐曲線與坐標變換；多選）設滿足 $0\leqq t\leqq 2\pi$ 及 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ 之點 (x,y) 之曲線爲 C，直線 L 之方程式爲 $y=x+2$，C 上之點至 L 之最小距離爲 d，則 (A) C 爲一圓 (B) C 爲一橢圓 (C) C 爲一雙曲線 (D) $d=\sqrt{2}+1$ (E) $d=\sqrt{2}-1$

11. （行列式與矩陣；多選）設 $A=(a_{ij})_{4\times4}$, $B=(b_{ij})_{4\times4}$, $C=(c_{ij})_{4\times4}$，且 $a_{ij}=(i+j+|i-j|)/2$, $b_{ij}=(i+j-|i-j|)/2$，則 (A) $c_{ij}=c_{ji}$ (B) $c_{14}=c_{23}=c_{32}=c_{41}$ (C) $c_{11},c_{22},c_{33},c_{44}$ 成算術級數 (D) $c_{11},c_{22},c_{33},c_{44}$ 成幾何級數 (E) $c_{44}=c_{11}+c_{22}+c_{33}$

12. （切線與圓錐曲線；單選）由橢圓 $x^2/9+y^2/4=1$ 外一點 $(5,4)$ 向橢圓所引二切線之斜角爲 θ_1、θ_2，則 $\tan(\theta_1+\theta_2)=$ (A) 10 (B) 6 (C) 14 (D) 8 (E) 以上皆非

13. （方程式論 1；多選）設 $x^4+ax^3+bx^2+cx+4=0$ 有四相異有理根，a、b、$c\in\mathbf{Z}$ 則 (A) $a+b+c=-5$ (B) $a=c$ (C) $b>0$ (D) $b<0$ (E) $a-b+c=5$

14. （方程式論 2；多選）設方程式 $x^4+(a-7)x^3+20x^2+(b-2)x+50=0$ 之每一根之加法反元素亦爲其根，則 (A) $a+b=0$ (B) $a+b>0$ (C) $a=7$ (D) $b=4$ (E) $a+b=9$

15. （方程式論 3；多選）設 α,β,γ 爲方程式 $3x^3-6x^2+7x-1=0$ 之三根，方程組

$$\begin{cases}\alpha^3x+\alpha^2y+\alpha z=1\\ \beta^3x+\beta^2y+\beta z=1\\ \gamma^3x+\gamma^2y+\gamma z=1\end{cases}$$

之解集合爲 $\{(x,y,z)\}$，則 (A) $x+y+z=4$ (B) $x>y>z$ (C) $z>x>y$ (D) z 爲合成數 (E) $x+z$ 爲合成數

16. （行列式；單選）設 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，則

$$\begin{vmatrix}1 & \cot\alpha & \cot2\alpha\\ 1 & \cot\beta & \cot2\beta\\ 1 & \cot\gamma & \cot2\gamma\end{vmatrix}=$$

(A) 0 (B) 3 (C) 1 (D) $\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma$ (E) $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$

17. （行列式與面積、體積；多選）設 $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,3,5)$, $P_3(2,0,4)$, $P_4(3,1,6)$，則 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$ 所決定 (A) 平行六面體之體積爲 5 (B) 三角柱之體積爲 5/2 (C) 四面體之體積爲 5/6 (D) $\overrightarrow{P_2P_1}$ 與 $\overrightarrow{P_3P_1}$ 所成平行四邊形之面積爲 $\sqrt{110}$ (E) $\overrightarrow{P_2P_1}$ 與 $\overrightarrow{P_3P_1}$ 所圍成三角形之面積爲 $\sqrt{110}/2$

18. （線性規劃 1；單選）中國酵素公司使用尿素與蜜糖，作爲原料生產味精。今有二種生產方法 A 與 B，若運用生產方法 A，則需使用 1000 公斤尿素及 500 公斤蜜糖，可得味精 90 公斤。若運用生產程序 B，則需 1500 公斤尿素及 400 公斤蜜糖，可得味精 100 公斤。今庫存尿素 6000 公斤，蜜糖 2000 公斤，問該公司最多可生產多少公斤味精 (A) 400公斤 (B) 420公斤 (C) 430公斤 (D) 440公斤 (E) 以上皆非

19. （線性規劃 2；單選）某公司欲製造子彈、手榴彈及砲彈，今存貨有 100 噸的炸藥，120 噸的鉛和 100 噸的鋼。若製造一噸的子彈需 0.7 噸鉛，0.1 噸炸藥及 0.2 噸鋼。一噸的手榴彈需 0.5 噸炸藥及 0.5 噸鋼。而一噸的砲彈需 0.5 噸鉛，0.3 噸炸藥，和 0.2 噸鋼。已知子彈、手榴彈、砲彈之售價分別爲300、600、900，則此公司可得最大利益是 (A) 200000 (B) 196000

(C) 195000 (D) 192000 (E) 190000

20. （線性規劃 3，一次數；多選）設直角座標平面上，同時滿足下列四不等式之點 (x, y) 之集合爲 S，

$$\begin{cases} 2x+y-4 \geq 0 \\ x-2y+8 \geq 0 \\ 2x+y-9 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \end{cases}$$

若 $(x, y) \in S$，且 $k = x+2y$，則

(A) S 之面積$=10$ (B) S 爲一平行四邊形區域 (C) k 之最大值$=12$ (D) k 之最小值$=2$ (E) S 爲凸集合