本期演練試題

閱讀測驗——預習三角函數

葉東進　設計

葉東進老師現爲臺中市私立曉明女中數學教師

一些創始性的概念、題材，它的內涵往往很淺近，在初學的時候，如果能做自學自通的嘗試而不仰賴他人的詳解，這樣長期訓練下來一定會有顯著的效果。這種訓練是很難得的，它的內容難易適中，又有階梯性，不致於難得離譜讓你無從著手。（補習班一些雜七雜八的難題，那些名師往往也都是靠背解答然後拿來嚇唬學生的，學生想從那裏獲得長遠的實際效果簡直是緣木求魚。）這種訓練的效果，在今年大學聯考的數學考試中就很明顯地表露出來，讀者切勿等閒視之。

正如作者在來信中所說，這種閱讀測驗可督促學生預習，讓學生在進入教學主題之前，對教學內容能做某種程度的獨立思考和了解。希望本篇的嘗試能有拋磚引玉的作用，引起大家對這方面多加努力，相信對於引導學生正常地學習數學及培養學生的自學能力、思考能力都會有相當的幫助。

——編者按

編輯先生:

這是一份學前測驗——也就是說在教授學生某種觀念之前先給予旁敲側擊式的測驗。使學生在進入主題之前對將學習的東西能有某種程度的了解。這種測驗的另一個作用是促使學生的預習，因此在設計這樣的試題時，最好的方法是採閱讀測驗方式。這份試題僅是一個嚐試的開始，相信對於引導學生正常的學習數學，可能是相當有效的方法 。敬頌

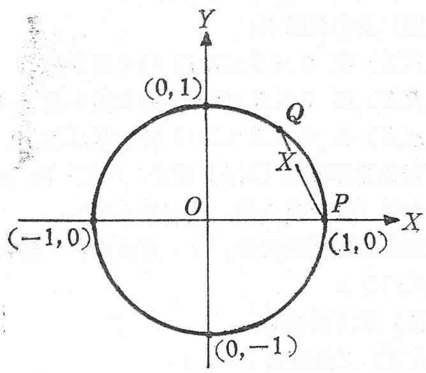
編安

葉東進　敬上　(66. 8. 17)

【說　明】

1. 測驗對象：主要對象是唸完高一將要升高二的學生，或是學過函數的高一學生；已學過三角函數的高二、高三學生，亦可將之作爲複習測驗。
2. 測驗時數：50 分鐘。

一、下圖是一個單位圓（卽半徑爲1的圓），圓心是原點O.



二、當一個質點 P 從 $(1,0)$ 出發，以逆時針方向沿着單位圓移動而到達Q，若所走的弧長是X，卽 $\widehat{PQ}=X$，顯然，這時 Q 點的位置（卽 Q 點的坐標）與弧長 X 有某種關係存在；譬如當 P 從 $(1,0)$ 出發，移動了弧長 $\pi/2$，到達了點 Q $(0,1)$〔一個圓周是 2π〕；又如當 P 移動了弧長 $3\pi/2$，則到達了點 $(0,-1)$； 又若 P 從 $(1,0)$ 出發繞了一圈再加半圓共是 3π， 則到達了點 $(-1,0)$，由此可以看出 P 點所移動的弧長 X 與所到達之點的位置存在有某種關係，這樣的關係是否是弧長與到達位置之間的一種函數關係呢？請仔細考慮一番。

三、若質點 P 從 $(1,0)$ 出發， 以順時針方向沿單位圓移動，爲與上述第二點所述有所區別起見，將所走的弧長以負值表示。譬如當 P 到達 $(0,-1)$ 時，所經之弧長記爲 $-\pi/2$，其他類推；這樣所述之弧長與到達點之位置間是否也是一種函數關係呢？

四、現在，讓質點 P 從 $(1,0)$ 出發，允許 P 點作逆時針及順時針方向的移動（連續而非跳躍的滑動），並且允許 P 點繞單位圓作週期性的移動（卽 P 點可以重複地繞許多圈；這時請注意， P 點繞的弧長是 $\pi/2$，跟繞 $5\pi/2$ 是到達同一位置）。

五、根據上列的陳述，弧長（亦可取負值）所在之變動範圍是整個實數 $\mathbf{R}$.

六、因此定義函數如下：當 P 點移動弧長爲 X 時，P所到達之點 Q 的橫坐標（ x 坐標） 記爲 $f(X)$，卽 $x=f(X)$， $X\in\mathbf{R}$. 而 Q 的縱坐標（y 坐標）記爲 $g(X)$，卽 $y=g(X)$， $X\in\mathbf{R}$.

七、請你對上述二個函數作幾何直觀的認識。

假如你已明白上面所有的陳述，請回答下列的問題。

1. （多選）選出眞確者：
(A) $f(X)$ 是單調遞增
(B) $g(X)$ 是單調遞減
(C) $f(X)$ 在 $0\leq X\leq\pi$ 時是遞減
(D) $f(X)$ 在 $0\leq X\leq\pi$ 時是遞增
(E) $f(X)$ 與 $g(X)$ 均不是 X 的一次函數

2. （多選）選出眞確者：
(A) $f(X)$ 與 $g(X)$ 均爲連續函數
(B) $f(X)$ 連續，但 $g(X)$ 不連續
(C) $f(X)$ 不連續，但 $g(X)$ 連續
(D) $f(X)$ 在 $|X|\leq\pi/2$ 連續
(E) $g(X)$ 在 $X=n\pi$， $n\in\mathbf{N}$ 不連續

3. （多選）選出眞確者：
(A) $f(X)$ 是一個嵌射（一對一）
(B) $g(X)$ 是一個嵌射
(C) $f(X)$ 在 $0\leq X\leq\pi$ 是一個嵌射
(D) $f(X)$ 與 $g(X)$ 均非嵌射
(E) $g(X)$ 在 $|X|\leq\pi/2$ 是一個嵌射

4. （單選）今定義：對任意一個函數 $F:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$
若滿足 $F(x)=F(-x)$， $\forall x\in\mathbf{R}$，則稱 F 是一個偶函數；若滿足 $F(x)=-F(-x)$， $\forall x\in\mathbf{R}$， 則稱 F 是一個奇函數。
根據上述定義，下列敍述何者爲眞？
(A) $f(X)$ 是一個偶函數
(B) $f(X)$ 是一個奇函數
(C) $g(X)$ 是一個偶函數
(D) $f(X)$ 與 $g(X)$ 都是偶函數
(E) $f(X)$ 與 $g(X)$ 均非偶函數，亦非奇函數

5. （多選）對於某一函數 $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$
若有一實常數 t 存在，使得對於任一 $x\in\mathbf{R}$，都滿足 $f(x+t)=f(x)$. 則稱f爲週期函數，而 t 爲f的週期。
(i) 一週期函數的週期通常是指最小正週期。
(ii) 地球的季節變化可說是一種時間的週期函數，週期爲1年。
根據上述定義，下列敍述，何者爲眞？
(A) $f(X)$ 不是一個週期函數
(B) $f(X)$ 與 $g(X)$ 都是週期函數
(C) $g(X)$ 是一個週期函數，其最小的正週期是 $\pi/2$
(D) $g(X)$ 是一個週期函數，其最小的正週期是 π
(E) $g(X)$ 是一個週期函數，其最小的正週期是 2π

6. （多選）選出眞確者：

(A) 存在一正數 X_0 使 $f(X_0)=g(X_0)$

(B) 存在一正數 X_1 使 $f(X_1)=2g(X_1)$

(C) 對於任意兩個正整數 m 與 n，存在一個正數 X_2 使 $nf(X_2)=mg(X_2)$

(D) 使 $f(X)=g(X)$ 之最小正數 X 是 $\pi/4$

(E) 設 $|X|\leq 2\pi$，則使 $f(X)=g(X)$ 之 X 值共有 2 個

7. （多選）選出眞確者:

(A) $f(-\pi/3)=1/2$

(B) $f(-\pi/3)$ 是一個無理數

(C) $g(-\pi/3)$ 是一個無理數

(D) $|g(-\pi/3)|<1/2$

(E) $f(0)+g(0)=1$

8. （多選）選出眞確者:

(A) $f(\pi/8)^2+g(\pi/8)^2=1$

(B) $f(\pi/12)^2+g(\pi/12)^2=3/2$

(C) $\forall X\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(X)+g(X)=1$

(D) $\forall X\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(X)\cdot g(X)=1$

(E) $\forall X\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(X)^2+g(X)^2=1$

9. （多選）選出眞確者:

(A) $f(X)$ 在 $0\leq X\leq 2\pi/3$ 時有最大值 1

(B) $f(X)$ 在 $0\leq X\leq 2\pi/3$ 時有最小值 -1

(C) $g(X)$ 在 $0\leq X\leq 2\pi/3$ 時有最小值 0

(D) 對任意閉區間〔a,b〕而言，$f(X)$ 與 $g(X)$ 均爲有界（即有最大值，也有最小值）

(E) 對任意給定的實數 s，至少存在一個實數 r 使 $f(r)=s$

10. （單選）選出眞確者:

(A) $f(X)$ 之像集爲〔$-1,1$〕

(B) $f(X)$ 之像集爲 $\mathbf{R}$

(C) $g(X)$ 之像集爲 $\mathbf{R}-\{0\}$

(D) $f(X)$ 在 $|X|\leq\pi/2$ 時，像集爲〔$-1,1$〕

(E) $g(X)$ 在 $\pi/2\leq X\leq 2\pi$ 時，像集爲〔$0,1$〕