

—— 微積分專題之五 ——

如何學習微積分

鄭國順

本文作者現任教於交通大學應用數學系

一、對數學的一般認識

數學可以說是一種語言，一種工具，高境界時是一種藝術（產生美感），一般人學習數學，若能達到把它當語言或工具的程度，已經是足夠了。數學是經由解決實際問題的激發而逐漸發展出來，經歷數千年的累積，尤其是十九、二十世紀的發展，已使數學的領域更廣、更深入；漸漸地，數學亦趨向專業化，數學家們依自己的興趣，在廣闊的領域中，選擇一個方向，而作更深入的鑽研，因此，現在要找一個各方面皆精通的數學家，已很困難，這是自然科學研究領域廣闊之後必然發生的結果，一個人的精力與時間到底是有限的，雖然你可以把運用這些精力與時間的效力提高，但總還是有限的，因此所產生的結果必定仍然是有限的。

學習數學，就像小孩子長大的過程一樣，並無捷徑可尋，完全是經驗的累積。實際上，學數學該是把數學的發展像電影一樣在腦子內放映過，只是把時間的單位縮短了，這意思是說，你雖不必像那些開創者一般費很多時間去摸索，但前人的思考過程，對你的瞭解該是有很大的幫助的。因此，可以這樣說，要瞭解數學，領會數學，可把數學當語言，當工具，那花時間去思考是必備的條件。

二、高中數學教法、讀法的偏差

由於聯考出題的方式左右了高中教學，因此，一般的印象是，大一的學生，有很多不知道如何去思考問題，無法定下心來做問題（缺乏耐心，也是學數學的致命傷），這些問題，學生在上大學之後，也都能感覺出來，但是缺少心理準備，而失去應變能力，再加上其他種種原因，一年下來，「微積分」這基本的課程，弄得灰頭土臉，若是碰到要求較嚴的老師，有些學生就在生死存亡的六十分線上掙扎，苦狀堪憐；究其原因，就是學生在高中時期，即已缺少思考的訓練，以及耐力的磨練，而老師授課，偏重於解題技巧，常有些「絕招」之類的「秘手」，學生也認為：數學也者，不外乎這些絕招及秘手而已，因此大背個別題解，致應受之基本訓練沒能完成，反在「猜題」中玩着「數學」。這好比學圍棋，定石變化不記，基本訓練不做，卻去背一些鬼手，詰棋之類的題解，瞭解圍棋的人都知道這是背道而馳的。

本文的主要目的，是希望能幫助那些高中時，所受的基本訓練不完全的學生，如何能有個心理準備來好好學習微積分，或可彌補高中訓練的不足。若微積分又用混的過去，那以後將很少再有受基本訓練的機會了。

三、微積分的主要內容

從國校到高中的數學課程，可以說是基礎知識，它告訴你實數系的一些性質，代數運算，以及一些數學入門知識，歸納起來，大致上是「定數」的加、減、乘、除運算。但一些基本觀念，如速度、加速度、成長率、圓周長等等，用定數的運算來看這些觀念，有時就顯得沒有適當的意義。因此，要有進展，就必須引進新的觀念，這新觀念就是「極限」。微積分就是用極限的觀念，來探討前面所提到的這一類問題；對速度、加速度、變化率等的探討，就是微分，而求圓周長、面積等的探討，就是積分。我們簡單地說明一下，如何運用「極限」的觀念來解決上面的問題，從這裏，再加上你自己的思考，也許你已可以掌握住極限的要點。譬如說，要求單位圓的周長，而我們只能量兩點間的直線距離，那怎麼辦呢？！一個方法是近似法，我們可以用內接正 2^n 邊形的周長來近似圓周長，只要 n 很大，正 2^n 邊形的周長與圓周長就很相近，到目前，還是定數的加法而已，現在就是緊要關頭的時候，衝破這個關卡，你就一路順風了。我們所說「極限」就是這正 2^n 邊形的周長當 n 趨近於無限大時，它趨近於一個定數，這定數就定義做圓周長，慢着，在這裏什麼叫做趨近於無限大呢？什麼叫做趨近於一個定數呢？趨近和等於有什麼分別呢？這些問題就是「極限」觀念的核心。在這裏，我們不想把所有問題都解答，只就趨近於無限大做一說明，其他的問題，大家在微積分課本上可以找到。小孩子常喜歡和別人比多或比大，甲小孩說：「我家錢多」，乙小孩說：「我家錢更多」；甲小孩說：「我家有一百萬」，乙小孩說：「我家有一千萬」；甲說：「我家有一萬萬……萬」。但有這麼一個較聰明的小孩說：「不管你說你家有多少錢，我家總比你家多一萬元」，如此一來，沒得話說了，他家錢較多；這裏就是趨近於無限大的形式。我們說 n 趨近於無限大，是說對於你所能說出來的一個定數，不管多大，這 n 都比它大，就是如此簡單的一個觀念。由前面的說明，我們可以看出微積分學科中，瞭解極限的意義是極端的重要，若對極限一知半解，那微積分是不可能學通的。

通常微積分所討論的內容，可以簡單地說明如下：由極限觀念的確立，而討論連續函數的性質。再來就是討論速度、加速度等觀念，也就是函數的導數；這在應用上是用導函數來看函數的一些特有性質，如圖形的大致情形是怎樣，極大、極小值的位置在那裏。再來就是求函數圖形所圍的面積，也就是積分，它可應用到如求曲線長，圓面積等問題上，最重要的是「微積分基本定理」的確立，這定理把積分（求面積）和微分（求速度）這兩個看似不相關的觀念連在一起，使得微積分連成一貫。再來就是把積分的觀念擴充，使得某些積分也能有意義，這就是非正常積分。再來就是討論無窮級數的收斂發散問題，Taylor 級數，冪級數等。在進入多變數函數的討論之前，通常介紹一下向量，而後有多變數函數的偏導數，可用來判定函數的大致形狀，而後有多重積分，如求體積，求質量中心等等。最後，有些書加上線積分、面積分，介紹 Green 定理，Stokes 定理，散度定理等，而後三個定理在應用上可以說隨處可見。

四、學習微積分的方法

(甲)、就像學習任何學科一般，底下兩樣是你必須訓練你自己的。

(1)要能思考問題：當碰到對自己來說是一項新的觀念或新的事務時，必須訓練對自己發問的能力，問題越多，瞭解會越深入，這是什麼道理呢？！因為若具備了發問的能力，那所問的問題極可能就是開創這新觀念者也會對他自己發問過的問題，當你在思索這問題的解答中，你就進入較深一層次的瞭解了；這就是本文第一節所說過的，前人的思考過程，對你的瞭解是有很大的助益的。在你對自己發問之後，經過一些思考，有些可以自己解答，有些可在書本上得到解答，若仍然有問題，那你可以問老師（也許這是「老師」最大的用處！），他定能想辦法使你得到滿意的答覆。如此的學習過程告一段落後，相信你已經深入地瞭

解這一新觀念了。

(2)要有耐心毅力：數學（或其他學科），在你看到漂亮簡潔的結果之前往往是一段枯燥無味的冗長運算，有些是無可避免的，有些雖可避免，但必須利用較高深的觀念，意思是說你的程度較高之後方可避免。因此，培養耐心及毅力是必須的，但如何培養呢？你只要靜下心來，把一些看似極其煩人的問題從頭到尾做一次，沒做出來再做；久而久之，你的耐心及毅力就會培養出來。很多學生在考試成績不好時就常抱怨：「老師，我觀念都對的，只有計算錯誤而已，你就只給我這麼少分」。這實在是多餘的抱怨，因為數學就是以精確著名，計算錯了等於白做。耐心及毅力能使你的演算結果更精確。

(乙)、前面兩樣，可以說是一般的準則，底下我們談談對學習微積分比較實際的方法。

方法一：先在家預習，思索問題，再到課堂上聽課，所思索的問題中，若沒能解答的，當堂發問，回家後再複習，複習之後做習題（如何做習題，以下再討論），若在這過程中，有任何問題自己不能解答，在下堂課上課時馬上發問。這是用功的學生可以採行的方法。

方法二：課堂上聽課，回家複習，做習題，有不能解決的問題，下堂課發問。這是一般學生可以採行的方法。

(丙)、習題的做法。

習題的做法：正確的習題做法，就是在課文瞭解之後再做的。習題有一部份是幫助你複習學過的觀念或方法，另一部份是轉的彎要多些，可以用到以前學過的觀念或方法，習題都要自己動手做，若你花一個小時去想一個問題，不管能不能解答，總是會有所收穫。當你用心而得到解答時，一定會有一股喜悅在心頭流過；所謂信心，就是這些喜悅累積所產生的結果。在你自己想過卻無法解答時，可以問同學，老師，找不到人問，可以看題解，但切不要一來就看解答，像看小說一般，如此方法，是題解最大的誤用。

五、結 語

用心寫了這些，總是希望學生能夠有個心理準備，在迎接更重的功課之前，明瞭應付的方法，希望能從這裏得到好處。