微積分專題之四

微積分與差和分大意
—連續與離散之間的類推

蔡 聰 明

本文作者現任教於臺大數學系

§1. 溫故而知新

數學是用來描述自然和人文現象的工具，這點跟其它科學並沒有兩樣。所不同的是，數學着重在探求一個現象的各種量，以及量與量之間的因果關係。用數學語言來說，分別就是**數**與**函數**的概念。因此中小學數學課程的主要內容就在於熟悉數與函數這兩個重要概念，以作爲進一步探求一個現象的未知數，以及各種量之間的函數因果關係之基礎。

事實上，中小學的數學主要都環繞在探討數的運算以及如何利用代數方法來處理問題，再輔以坐標幾何與向量幾何作爲處理問題的轉化工具。至於較高層次的函數概念才剛剛萌芽。我們只學到一些基本的函數模型，如多項函數，指數函數，對數函數，三角函數等。要更上一層樓研究函數的性質，或尋求一個現象各種量之間的函數因果關係，笛卡兒與費瑪的坐標幾何是施不上力的，一直要等到牛頓與萊布尼慈引入微積分的概念及一套方便的操作記號後，問題才告解決。從此開始了近代數學的蓬勃發展。

我們要強調，數學的主題就是處理函數問題，也就是研究函數關係與找函數關係。大致說來，函數可分爲**連續型**與**離散型**，這分別是由於自然界的量有連續量與離散量而來的。一般說來，定義在連續集（如區間）上的函數屬於前者，而定義在離散點集（如 N 或 Z）上的函數屬於後者。 事實上，離散函數就是我們所熟悉的數列。對付這兩類函數，分別就有微積分與差和分，更進一步而有微分方程與差分方程。其實連續與離散之間的差別往往並不那麼大，因爲連續的東西可以離散化，而對一個粗心的人來說，離散的東西差不多就看成是連續的。因此可以想像得到，連續與離散之間具有很多類推關係，這分別是微積分與差和分的類推。

本文的目的是要將差和分與微積分作一整理，尤其要強調它們之間的類推。只有在類推的觀照下，才容易掌握住所學的東西。本文對於學過微積分的人，可作爲全局的導向和歸位；對未學過微積分的人，也可作爲課前的預習。

§2. 差分與和分

(甲) 差分. 考慮一個離散函數（即數列）$u:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{R}$，它在 n 所取的值 $u(n)$ 記成 u_n，通常我們就把這個函數書成 $u=(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ 或 (u_n)。數列 u 的差分 $\triangle u$ 還是一個數列，它在 n 所取的值以定義爲

$$(\triangle u)_n \equiv u_{n+1}-u_n$$

後我們乾脆就把 $(\triangle u)_n$ 簡記爲 $\triangle u_n$

〔例〕: 數列 1, 4, 8, 7, 6, −2, …… 的差分數列爲 3, 4, −1, −1, −8……

註: 我們說"數列"是"定義在離散點上的函數"如果在高中，這樣的說法就很惡劣。但在此地，卻很恰當，因爲這樣才跟連續型的函數具有完全平行的類推。

差分算子的性質

(i) $\triangle(u_n+v_n)=\triangle u_n+\triangle v_n$ (加性)
$\triangle(\alpha u_n)=\alpha\triangle u_n$ (齊性) 〔合稱線性〕

(ii) $\triangle u_n=0 \Longrightarrow u_n\equiv c$ (常數) 〔差分方程根本定理〕

(iii) $\triangle n^{(k)}=kn^{(k-1)}$

其中 $n^{(k)}\equiv n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)$，而 $(n^{(k)})$ 叫做排列數列。

(iv) $\triangle 2^n=2^n$，(2^n) 叫做自然等比數列。

(iv)′ 一般的指數數列（幾何數列）r^n 之差分數列（即"導數列"）爲 $r^n(r-1)$

（乙）和分. 給一個數列 (u_n). 和分的問題就是要算和 $\Sigma_{i=l}^{m} u_i$. 怎樣算呢? 我們有下面重要的結果:

【定理 1】（差和分根本定理） 如果我們能夠找到一個數列 (v_n)，使得 $u_n=\triangle v_n$，則

$$\sum_{i=l}^{m-1} u_i = v_i\Big|_{i=l}^{i=m} = v_m - v_l \tag{1}$$

和分也具有線性的性質:

$$\begin{cases}\Sigma(u+v)=\Sigma u+\Sigma v\\ \Sigma\alpha u=\alpha\Sigma u\end{cases}$$

§3. 微分與積分

（甲）微分. 給一個函數 f，若牛頓商（或差分商）$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的極限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，則我們就稱此極限值爲 f 在點 x_0 的**導數**，記爲 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$，亦即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若 f 在定義區域上每一點導數都存在，則稱 f 爲**可導微函數**。我們稱 $Df: x\longrightarrow Df(x)$ 爲 f 的**導函數**，而 $D: f\longrightarrow Df$ 叫做微分算子。

微分算子的性質:

(i) $D(f+g)=Df+Dg$ (加性)
$D(\alpha f)=\alpha Df$ (齊性) 〔合稱線性〕

(ii) $Df=0 \Longrightarrow f\equiv c$ (常數) 〔微分方程根本定理〕

(iii) $Dx^n=nx^{n-1}$

(iv) $De^x=e^x$

(iv)′ 一般的指數函數 a^x 之導函數爲 $a^x\log a$

（乙）積分. 設 f 爲定義在 $[a,b]$ 上的函數，積分的問題就是要算圖甲陰影的面積。我們的辦法是對 $[a,b]$ 作分割: $a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n=b$；其次對每一小段 $[x_{i-1},x_i]$ 取一個樣本點 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$；再求近似和 $\Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$（見圖乙）；最後再取極限 $\lim\Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

（讓每一小段的長度都趨近於 0）。若這個極限值存在，我們就記爲 $\int_a^b f$ ．叫做 f 在$[a,b]$上的積分。當 $f \geq 0$ 時，$\int_a^b f$ 的幾何意義就是圖甲陰影的面積。

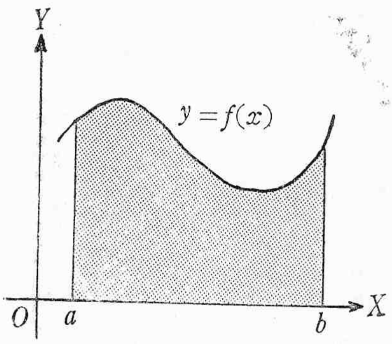


圖 甲

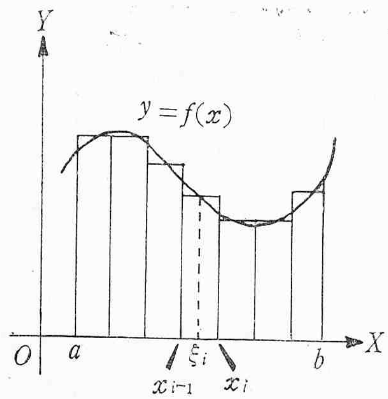


圖 乙

積分算子也具有線性的性質:

$$\begin{cases} \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g & \text{（加　性）} \\ \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f & \text{（齊　性）} \end{cases}$$

【定理 2】 若 f 爲一連續函數，則 $\int_a^b f$ 存在。

（事實上，連續性也“差不多”是積分存在的必要條件。）

【定理 3】（微積分根本定理） 設 f 爲定義在閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數，我們欲求積分 $\int_a^b f$.

如果我們可以找到另一個函數 g，使得 $g' = f$，則

$$\int_a^b f = g \Big|_b^a = g(b) - g(a) \tag{2}$$

註: (1), (2)兩式雖是類推，但有一點點差異，卽和分的上限要很小心!

上面定理 1 及定理 3 基本上都表述着差分與和分，微分與積分，是兩個互逆的操作，就好像加法與減法，乘法與除法是互逆的操作一樣。

我們都知道差分與微分的操作比和分與積分簡單多了，而上面定理 1 及定理 3 告訴我們，要計算(u_n)的和分及 f 的積分，只要去找另一個 (v_n) 及 g 滿足 $u_n = \triangle v_n$, $g' = f$ （這是差分及微分的問題），那麼對 v_n 及 g 代入上下限就得到答案了。換句話說，我們可以用較簡單的差分及微分操作來掌握較難的和分及積分操作，這就是“以簡御繁”的精神。牛頓與萊布尼慈對微積分最大的貢獻就在此。

§4. 差和分與微積分之間的類推關係

除了上述（§2, §3）所列差分、和分與微分、積分的基本性質具有類推外，現在我們要再列出更多的類推關係。我們也要注意兩者之間的差異處， 以及類推不成立的情況。 換句話說，我們不但要小心分辨“異中之同”，也要小心分辨“同中之異”.

（甲）**Taylor 展開公式**

這分別有離散與連續的類推。它是數學中「**逼近**」這個重要想法的一個特例。逼近想法的意思是這樣的：給一個函數 f，我們要研究 f 的行為，但 f 本身可能很複雜而不易對付，於是我們就想法子去找一個較"簡單"的函數 g，使其跟 f 很"靠近"，那麼我們就用 g 來取代 f。這又是以簡御繁的精神表現。由上述我們看出，要使用逼近想法，我們還需要澄清兩個問題：即如何選取**簡單函數**及**逼近的尺度**。

(一) 對於連續世界的情形，Taylor 展式的逼近想法是選取**多項函數**作為簡單函數，並且用局部的"**切近**"作為逼近尺度。說得更明白一點，給一個直到 n 階都可導微的函數 f，我們要找一個 n 次多項函數 g，使其跟 f 在點 x_0 具有 n 階的"切近"，即 $f^{(i)}(x_0)=g^{(i)}(x_0)$, $i=0,1,\cdots,n$. 答案就是

$$g(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

此式就叫做 f 在點 x_0 的 n 階 Taylor 展式。

g 在 x_0 點附近跟 f 很靠近，於是我們就用 g 局部地來取代 f. 從而用 g 來求得 f 的一些局部的定性行為。因此 Taylor 展式只是局部的逼近。當 f 是足夠好的一個函數，即是所謂**解析**的函數時，則 f 可展成 Taylor 級數，而且這個 Taylor 級數就等於 f 自身。

值得注意的是，一階 Taylor 展式的特殊情形，此時 $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 的圖形正好是一條通過點 $(x_0,f(x_0))$ 而且切於 f 的圖形之直線。因此 f 在點 x_0 的一階 Taylor 展式的意義就是，我們用過點 $(x_0,f(x_0))$ 的切線局部地來取代原來 f 的曲線。這種局部化"**用平直取代彎曲**"的精神，是微分學的精義所在。

利用 Taylor 展式，可以幫忙我們做很多事情，比如判別函數的極大值與極小值，求積分的近似值，作函數表（如三角函數表，對數表等），這些都是意料中事。事實上，我們可以用逼近的想法將微積分"一以貫之"。

復次我們注意到，我們選取多項函數作為逼近的簡單函數，理由很簡單：在衆多初等函數中，如三角函數，指數函數，對數函數，多項函數等，從算術的觀點來看，以多項函數最為簡單，因為要計算多項函數的值，只牽涉到加減乘除四則運算，其它函數就沒有這麼簡單。

當然，從別的解析觀點來看，在某些情形下還另有更有用更重要的簡單函數。例如，三角多項式，再配合上某種逼近尺度，我們就得到 Fourier 級數展開，這在應用數學上佔有舉足輕重的地位。（事實上，Fourier 級數展開是採用**最小方差**的逼近尺度，這在高等數學中經常出現，而且在統計學中也有應用。）

註： 取 $x_0=0$ 的特例，此時 Taylor 展式又叫做 Maclaurin 展式。不過只要會做特例的展開，欲求一般的 Taylor 展式，作一下平移（或變數代換）就好了。因此我們大可從頭就只對 $x=0$ 點作 Taylor 展式。

(二) 對於離散的情形，Taylor 展開就是：

給一個數列 $(f_t)_{t\in Z}$，我們要找一個 n 次多項式數列 (g_t)，使得 g_t 與 f_t 在 $t=0$ 點具有 n 階的"差近"。所謂在 0 點具有 n 階差近是指：

$$f_0=g_0,\quad \triangle f_0=\triangle g_0,\cdots,\triangle^n f_0=\triangle^n g_0$$

答案是

$$g_t=f_0+\triangle f_0 t^{(1)}+\frac{\triangle^2 f_0}{2!}t^{(2)}+\cdots\cdots+\frac{\triangle^n f_0}{n!}t^{(n)}$$

此式就是離散情形的 Maclaurin 公式。

（乙）分部積分公式與 Abel 分部和分公式的類推

(一) 分部積分公式：

設 $u(x)$, $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，則

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(二) Abel 分部和分公式:

設 (u_n), (v_n) 爲兩個數列，令 $s_n=u_1+\cdots\cdots+u_n$, $s_0=0$，則

$$\sum_{k=1}^{n-1}u_kv_k=\sum_{k=1}^{n-1}(\triangle s_{k-1})v_k=s_{n-1}v_n-\sum_{k=1}^{n-1}s_k\triangle v_k$$

上面兩個公式分別是萊布尼慈導微公式 $D(uv)=(Du)v+u(Dv)$, 及萊布尼慈差分公式 $\triangle(u_kv_k)=(\triangle u_k)v_{k+1}+u_k(\triangle v_k)$ 的結論。注意到，這兩個萊布尼慈公式，一個很對稱，另一個則不然。

(丙) 微分方程根本定理與差分方程定理的類推

(一) 微分方程根本定理是說: 若 $y'=0$ 則 y 必爲常函數。

(例：用它可以證明一階微分方程 $y'=ky$ 的解答必形如 $y=y(0)e^{kt}$)

(二) 差分方程根本定理是說: 若 $\triangle y_n=0$，則 y_n 必爲常數列。

(例：用它可以證明一階差分方程 $\triangle y_n=ky_n$ 的解答必形如 $y_n=y_0(1+k)^n$)

(丁) 複利與連續複利 (這也分別是離散與連續之間的類推)

(一) 複利的問題是這樣的: 有本金 y_0, 年利率 r，每年複利一次， 要問 n 年後的本利和 $y_n=?$ 顯然這個數列滿足差分方程

$$y_{n+1}=y_n(1+r)$$

根據 (丙) 之(二)得知

$$y_n=y_0(1+r)^n$$

這就是複利的公式。

(二) 若考慮每年複利 m 次，則 t 年後的本利和應爲

$$y(t)=y_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

令 $m\to\infty$，就得到連續複利的概念，此時本利和爲

$$y(t)=\lim_{m\to\infty}y_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=y_0e^{rt}$$

換句話說，連續複利時， t 時刻的本利和 $y(t)=y_0e^{rt}$ 就是微分方程

$$'=ry$$

的解答。

由上述我們看出離散複利問題由差分方程來描述，而連續複利的問題由微分方程來描述。對於常係數線性的差分方程及微分方程，解方程式的整個要點就是疊合原理，因此求解的辦法具有完全平行的類推。

(戊) Fubini 重和分定理與 Fubini 重積分定理 (也是離散與連續之間的類推)

(一) Fubini 重和分定理:

給一個兩重指標的數列 (a_{rs})，我們要從 $r=1$ 到 m, $s=1$ 到 n, 對 (a_{rs}) 作和 $\sum_{r,s=1}^{m,n}a_{rs}$, 則這個和可以這樣求得: 先對 r 作和再對 s 作和 (反過來亦然)。亦即我們有

$$\sum_{r,s=1}^{m,n}a_{rs}=\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{rs}\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{m}a_{rs}\right)$$

(二) Fubini 重積分定理:

設 $f(x, y)$ 為定義在 $\Omega=[a, b]\times[c, d]$ 上之可積分函數，則

$$\int_{\Omega} f=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy$$

當然，變數再多幾個也都一樣。

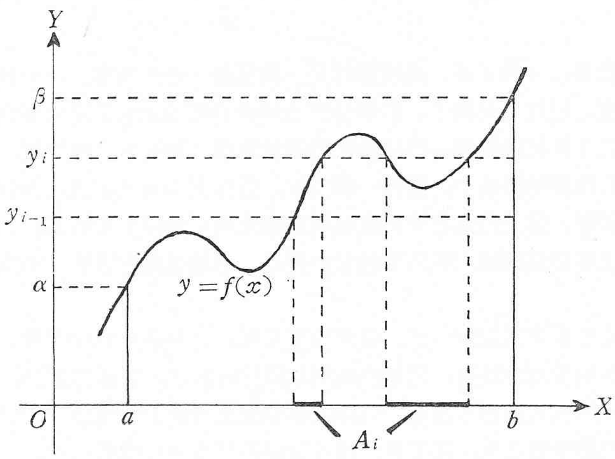
(己) Lebesgue 積分的概念

(一) 離散的情形:

給一個數列 (a_n)，我們要估計和 $\sum_{i=1}^{n} a_i$, Lebesgue的想法是，不管這堆數據指標的順序，我們只按數值的大小來分堆，相同的分在一堆，再從每一堆中取一個數值，乘以該堆的個數，整個作和起來，這就得到總和。

(二) 連續的情形:

給一個函數 f，我們要定義曲線 $y=f(x)$ 跟 X 軸從 a 到 b 所圍出來的面積。(見下圖)



Lebesgue 的想法是對 f 的影域 $[\alpha, \beta]$ 作分割:

$$\alpha=y_0<y_1<\cdots\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots\cdots<y_n=\beta$$

函數值介乎 y_{i-1} 到 y_i 之間的 x 收集在一齊，令其為 $A_i=\{x \mid y_{i-1}\leq f(x)<y_i\}$, $i=1, \cdots, n$. 於是 $[a, b]$ 就相應分割成 $\Omega=A_1+\cdots+A_n$, 取樣本點 $x_i\in A_i$, 作近似和

$$\Sigma f(x_i)\times(A_i \text{ 的長度})$$

讓影域的分割加細，上述近似和的極限若存在的話，就叫做 f 在 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 積分。

以上我們只敍述粗略的大綱，至於詳細情形請參閱楊維哲、蔡聰明編著的普通數學教程（文仁出版社印行）一書。