

## —— 微積分專題之三 ——

# 微積分教學雜談

朱 建 正

本文作者現任教於臺大數學系

### 一、微積分課程與數學系陣容之關係

微積分是大學的醫、工、理、商、農學院的大一共同必修科。不論是國內或國外，大學裏這類的基礎數學課程多半由數學系負責。數學系的同仁也知道，這是學數學的人的飯碗所在。像 MIT 的數學系，如今在美列前十名。但是當初它是為提供數學課程給修工程的學生而設立的。在 Columbia 大學，應用數學的教授都在工學院。工學院的教授與學生，常指責數學系所授的微分方程不切實際，每年都吵著要自己教，數學系總要辯護一番。因為數學系知道，少了一門必修課，很可能就要少聘一個教授，因而影響數學系的陣容。就是在國內也是一樣。臺大從前連工學院的工程數學、微分方程和物理、化學系的高微都是由數學系提供的。後來臺大數學系師資極為欠缺，只好放棄這些課程，由各系自己去安排。但這一放，就再也收不回來了。現在臺大數學系可以提供足夠的人力來開外系的基礎數學課程，但是數學系可開的，只有微積分了。即使如此，也仍有三十五班次。

### 二、如何教好微積分

#### 甲、要有合適的中文微積分教科書。

學生的中文閱讀能力比英文高出很多。一般學生無法有效使用英文教科書，往往依賴上課聽講，只看教科書中的例題及習題。好的中文教科書可以減輕教師講授壓力，增進學生學習能力。

最近幾年，用中文寫的微積分多起來了。幾乎每個大學的數學系老師都有人寫。除了已出版的以外，清華剛寫完一本，師大也有一個三年計劃。因為每個老師對課程編排的意見不同，學生素質出入也大，不會有一本書適合所有情況。所以我覺得教科書愈多愈好。

#### 乙、在開始上課前要瞭解學生程度。

許多僑生的微積分預備知識，如代數、解析幾何、三角的準備都很缺乏，根本無法立刻教以微積分。這個問題的基本解決與政府政策有關。治標的辦法，是先教最起碼的預備知識，必要時，降低及格標準。

就是本地生也分甲、丙、丁組，各組對數學的準備不同。各高中的數學教學所要求的有時也不同。不過這種差異不會嚴重到不能學習的地步，通常只會影響成績。我教過一個學生，上學期只有 20 分。他說，他完全放棄數學而考上的。也許他是特種考生，也許他偷看或作弊，總之，這是他個人要負責的事。

丙、主動和學生連繫，並帶動學生之間的討論風氣。

現在的學生往往極為被動，但是教師必須認識學生學習的困難，並且也要知道自己講課的效果，以便研究改進，辦法是主動地和學生接觸。交作業、口試雖然都要較費時間，但卻是有效的辦法。

少數較勤快的學生往往喜歡與老師接近，若是這類學生太多，老師也不勝負荷。若是一兩個學生與老師切磋以後，可以教給其他學生，則學生可以印證所學，並培養解說能力。同時增進讀書研究風氣。

丁、以教材配合學生的主修課程，提高學生學習動機。

此事有賴授課先生的修養，和主修課與數學關係的程度。例如現在動、植物、醫學院的不少科系都要修乙種微積分，學生往往不知學了做什麼。是否該挪出一些時間教點統計？這也牽涉到大學一般數學的課程何必非微積分不可的問題。

戊、授課先生之間，應常彼此交換意見。

己、有空時，思索一下教材要如何教。

通常，微積分教個幾年，對教材的各個細目，都很瞭解。所謂，不用準備也可以上臺去教。我們事實上，無法要求先生每節課前都一定要準備一小時，因為有時只剩二十分鐘就要上課了，還沒準備。倒不如，平時用心想一下，組織好。存個自己也想寫本教科書的念頭，也不錯。

### 三、如何學好微積分

甲、要看教科書。

許多高中學生是不看數學教科書的。進大學，把這習慣也帶來了。後果是，對問題中的每一個陷阱，先生要在試卷上一一叮嚀，否則一定有學生掉下去。教科書厚，細節多，先生無法一一講到，學生一定要看書。再者，高中時一個單元往往會重覆講，在微積分課則無此時間。

乙、要做習題，對答案無把握的，要和別人討論。

做習題，是老生常談。問題常常發生在眼高手低。簡單的問題，瞄他一眼，以為做了沒意思。難的問題，嫌做得慢，半天才熬出一題。此外，是自己對計算錯誤的寬容。大數學家高斯做學生時，算術問題算錯了，老師也要打手心。我做小學生時，老師也是打手心的。現在大學生算錯了，就怕不及格而已，懲罰很重卻無效果。這點，學生要嚴格鞭策自己。計算正確與否，除了方法是否恰當有影響外，它是一種心理習慣，幾乎是從小培養的。

愈是高深的學問，愈是要和別人討論。討論可以驗出錯誤，也可以提示解題的方法。

丙、要上課。

大學教授往往以為學生到了大學才會逃課，殊不知，這習慣早在高三時就有了。除了嬉玩成性的學生以外，逃課者總認為聽講不如自己讀。其實自己讀，非常單調。聽講一方面增加一種學習方式，一方面東西聽過一次有些印象，讀起來也比較不吃力。有些逃課學生自己並無讀書進度，不考試時幌來幌去莫名其妙地把時間花掉了。一到期中、期末考就措手不及。當然上課多少可以知道先生的偏好，準備考試時較有重點。

#### 四、高中要不要教微積分

我最早看到  $dy/dx$  的符號時，是高中時，從開明少年叢書，數學的園地、數學列車（此叢書共五種，現仍有售）看來的，那時我不知道我會選擇教微積分做我的職業，這些書都是在大陸撤退前寫的，那時候大學才教微積分，這個習慣一直沿用至今。

我到現在還念念不忘，初中教理化的老師，爲了從  $V=at$  導出  $S=at^2/2$ ，費了好大的力氣，整整花了一堂課。大部分的學生聽完了，還莫名其妙。他大致是用黎曼和（阿基米得）的方法。他教書的認真令人佩服，可是，這公式的導出對初中學生而言，實在有不可克服的困難。

就像初中才能教代數的爭議一樣，是否也要到大學才能教微積分？

一個數學系的學生說，既然數學知識愈積愈多，那麼到後來，豈不是會沒人懂最新的數學了嗎？其實這是不可能的。因爲人們對數學的要求隨時代而不同。例如一直要到 19 世紀初，哈佛大學才要求每一個入學者要懂算術，其後約一百年，代數是在大學教的。如今算術在小學就得全部學會，代數初中就教，而有些人已經覺得不妨教小學生一點未知數原理了。如果社會需要，說不定將來初中就教微積分呢。不僅是人們對數學教育的要求提高，就是人們接受數學的平均能力，也會受到日漸數學化的社會的影響而提高起來。

我以爲在聯考制度和升學主義之下，高中不可能教微積分。因爲如果要教，至少要教所有基本函數的微分與積分才有意義，分量不少。就算能教得完，試題的難度也無法加以限制。這樣子，著名高中和補習班的老師可以天天忙著去挖掘問題來唬學生了。

開給優秀學生選修是好主意，可是國中數學選修科的實驗，不得不使我們小心行事。據說，當初決議高中聯考不考選修科的材料，結果國中就不教，以致於編譯館的書都賣不出去。後來只有規定要考。以致有初三數學材料過多，消化不良的毛病。

#### 五、我對課程的想法

我也想寫一本教科書。我預備先複習所有的初等函數。其次講這些函數的微分，貫徹「所有初等函數只要列出解析形式，就可以微分」的原理。當然對數與指數函數有點問題，但我可以把這個問題在講完積分以後解決。再來積分的理論與計算。再其次講級數。

多變數函數的微分，積分及向量，這些材料比較活，花樣較多。優秀的學生在學習時，記住少數公式，及次要公式所從出的根據以及一些容易弄錯的地方。遇到考試時，先導出公式，再代入公式。中等的學生猛記公式，如切平面公式，弧長公式，極座標的面積及弧長公式等。低劣的學生則有無從下手之感。

因此，這一部分我將以解各個類型的問題爲主。所謂「兵來將擋，水來土掩」。就好像舊式高中課本在分析二元二次聯立方程式的解法一樣。它所列的解法不能解所有的二元二次聯立方程式，只能解特殊設計的問題。多變數微積分的問題也一樣，要經過特殊設計才好處理。教過的老師都有這種經驗，即如果在上課時，想信手拈來一個例子，往往會「掛」在黑板上。

#### 六、統一與獨立教學的優劣比較

臺大數學系曾經實行微積分教科書、考試、成績標準都統一的辦法，和現在各先生完全獨立行事的教學不同。

統一教學使得成績具有絕對的意義，不過通常暑假班要鬆一些。由於重修的學生增加，修過的學生的微積分都有相當的水準。但是，因爲僑生原來的素質較差，故墊底的多是僑生和聯考較冷門的系的學生。從教育的意義來說，強使準備不足的人接受這種微積分教學，無異削足適履。反過來說，有些資質好的學

生抱著反正有人墊底的心理，不肯用功，老師也無可奈何。那時常常平均 36 分就可及格。

獨立教學以後，學生的成績只有相對的意義。一個普通班不及格的學生，也許在僑生班就及格了。看起來好像不公平，實際上比較合乎教育的精神。

獨立教學使授課先生更能發揮。他可以用考試來鞭策學生用功，也可以採用彈性進度，並改變教材講授的次序。當然，不可否認的，對懶惰的老師而言，隨便教，隨便考，大家至少 80 分，真是太好了。數學系的微積分課還沒有這種現象。我贊成這種獨立教學。

## 七、微積分對大一學生的意義

微積分幾乎把大學生以前所學的所有數學都用到了。拿作中國菜來作比喻。那些極限、連續的觀念好比調味法，大學以前的數學好比掌菜刀的方法。刀法不好，中國菜就做不好，我們可以說，微積分課是所有高中以前的數學的總驗收。它是一個回顧過去，展望未來的關鍵點。

最後這句話尤其適用於數學系的學生。微積分是進入數學殿堂之門，學生可以在這兒試驗自己對數學的能耐，從而決定自己的未來。微積分的發展是為了解微分方程式。讀物理、工程的學生將來多少會遇到一些微分方程。又有一些系要求微積分，是因為統計方法的應用之故。

一個有目共睹的事實是目前的聯考及補習扭曲了學生對數學的認識。微積分是許多大學生認識數學真面目的最後一個機會，因為他們有許多以後一生不再學習數學。他們也許會忘掉大部分微積分所用的特殊技巧，但是他們會永遠記得，甚至不自覺地運用數學裡的看問題的觀點。如果老師把這些當做他教微積分的目標，他應當會教得很起勁才是。