微積分專題之一

人怎樣求得面積？

黃武雄

很多人望文生義，說是積分求得了面積，其實積分的概念人類老早就有了，而求面積求體積的一般方法却遲至十七世紀才出現，明白「微積分基本定理」的人會說：是微分求得了面積。

本文綱要

一、早期的貢獻。
二、微分與積分。
三、求積問題發展中的前兩個時期。
四、動態處理的基楚。
五、用微分法求積。
六、求積問題的歷史意義。

一、早期的貢獻

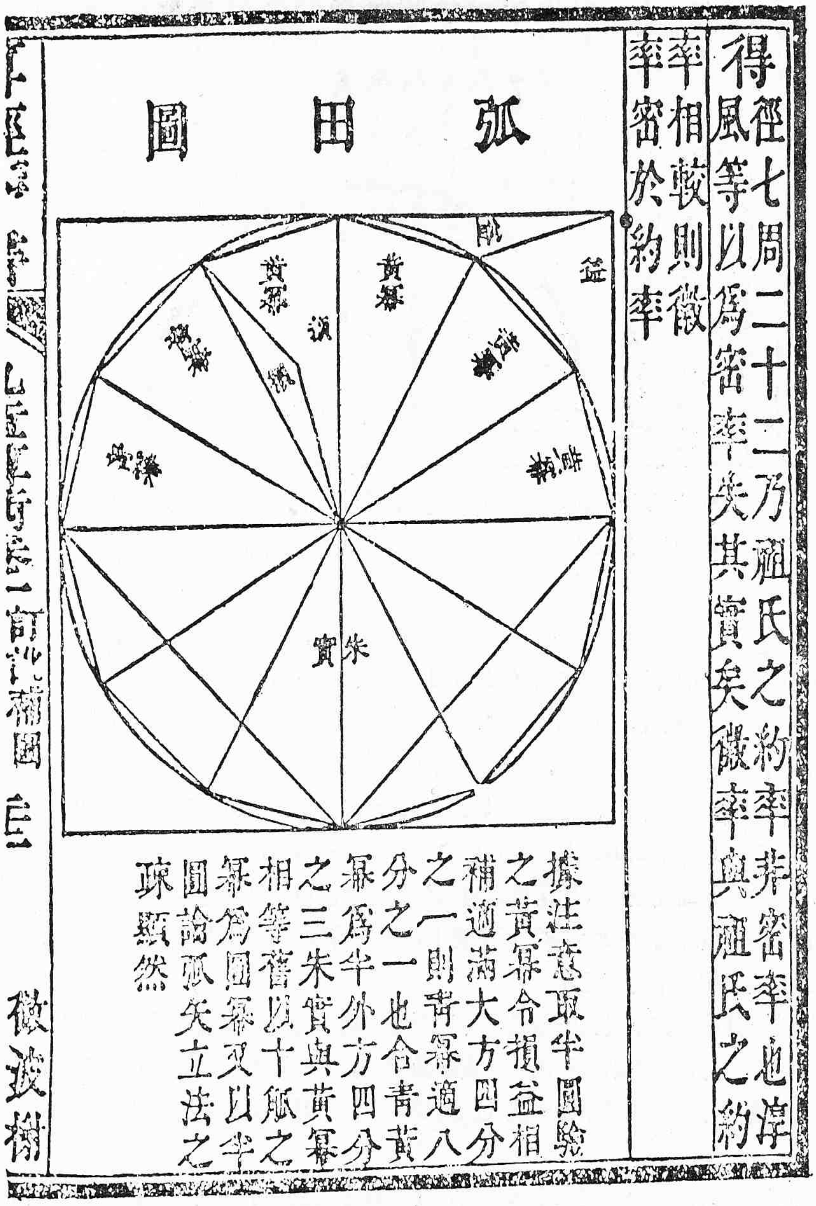
人類很早就碰到了求面積求體積的問題(以下通稱求積問題)，由於求積問題是來自實際生活的需要，地球上各民族，都不約而同， 對它做過一定程度的貢獻。 這些貢獻廣泛散見於各地留存的古籍。記載顯示，各民族都知道利用較簡單的圖形，例如多邊形或小長方形的聯集等，來逼近（或稱窮盡）一塊較複雜的面積。如果說這一想法便是積分的概念〔註一〕，那麼我們大可以放心地說，人類老早就從概念上認識了積分。

在中國，三國時魏人劉徽爲求圓周率的近似值（西元 263 年），已經利用過三千零七十二邊的內接正多邊形來逼近圓的面積〔註二〕。九章算術經戴震再校訂的版本中，仍存有劉徽的弧田圖。（見圖一）劉徽改編過九章算術〔註三〕，並著有海島算經。當時他計算出來的圓周率精確到 3.14159，概念上雖亦建立在積分上面，但所需的方法則遠爲複雜。可以想見中國人在三國以前，對於積分這個表面十分摩登的概念，一定已經知道一段時候了。

〔註一〕另一看法是直接將「積分」當作變量的纍積。例如位移是速度的纍積，功是所抗拒作用力的纍積，但速度與作用都是依賴微分引入之後，概念才完全淸楚。因此這種對積分的看法，事實上只是把積分當作微分的附庸而已，不能把積分當作一個獨立的概念。本文寧先從面積的角度來界定積分，也就是說文中的積分概念指的是 Riemann 積分的定義，這也就是下文所提窮盡法的意思。

〔註二〕詳節請參見「人間叢書第一輯」中「祖冲之與圓周率」或「數播季刊」第一卷第四期李宗元撰文。

〔註三〕九章算術與周髀算經一般認爲是中國最早的兩部經典著作。至於那一部書出現較早，論者素有爭議。有一種說法是，周髀孕於周而成於漢，九章則孕於秦與西漢成於東漢年間。參見傅溥所譯李約塞的「中國之科學與文明」第四册。



圖一

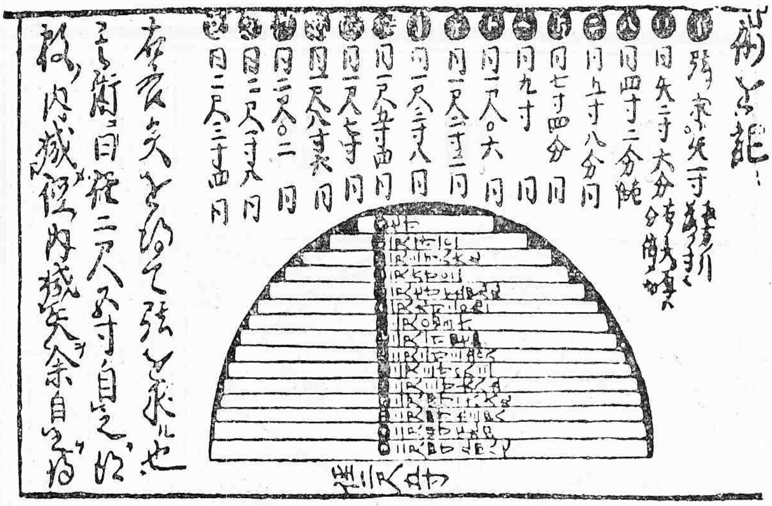
戴震的「九章算術」校訂版中插圖之一。它說明劉徽用以計算 π 的近似值的窮盡法（西元二百六十四年）。

（錄自：傅溥譯「李約瑟：中國之科學與文明」第四册，第五三頁）

對於積分概念的運用，劉徽的成就當然不是一項孤立的事實，在他之前有東漢張衡（約公元 130 年左右）。同時代有三國吳人王蕃，其後更有晉祖沖之（公元 430～501），趙友欽（公元 1300 年左右）。宋人沈括所著「夢溪筆談」（公元 1086）中亦曾提過「割會之術」、「再割」、「造微之術」、「隙積」等語。而明周述學（公元 1558）所著「神道大編曆宗算會」一書中，也錄有三角錐內堆積十層彈丸的附圖。

在日本十七世紀的數學家對積分概念也有進一步的貢獻，村松茂清（公元 1683 年歿）將球體切成許多平行的薄片，每片都近似於一段扁圓柱，藉此求得球體體積的近似值，其後野澤（約在 1664 年）再行切薄，而澤口一元（約 1670 年）在其所著「古今算法紀」一書中，亦用同樣想法求出圓面積。（見圖二）

圖二



（錄自：Smith & Mikami（三井義夫）, *A History of Japanese Mathematics*, (1914) 第 130 頁所附的 1687 年「改算記綱目」插圖）

在西方，由於希臘文明（不專指雅典文化）保存較爲完妥。積分概念的起源，可以遠溯到公元前三世紀 Eudoxus（408～355 B. C.）在窮盡法（Method of Exhaustion）上面的啓蒙工作。Eudoxus 是柏拉圖的弟子，曾認識到，給定兩數，自第一數扣除其本身之半（或大於其半的部份），再自所餘扣除所餘之半 將此重複進行，經有限次扣除之後，所餘可小於第二數。這個性質後人稱它爲 Archimedes 性質 (Archimedes Principle) 是因窮盡法來到 Archimedes（公元前 287～212）才有了較有意思的體現。Archimedes 是西西里島 Syracuse 人，他先用多角形逼近一個圓，而後以圓的某一取定的直徑爲軸，將整個圖形廻轉，來求得球面面積。說明了直徑爲 R 的球面面積正好就是半徑爲 R 的圓的面積。（例如半徑爲單位長的球面面積等於 $\pi\cdot 2^2=4\pi$）。事實上，早些時候，Euclid（約公元前 300 年左右）也用過窮盡法證得圓的面積與半徑平方成正比。

如果用心比較早期中西數學發展的差異，可以看清中國人的數學側重「**量的數學**」，希臘人的數學（**假設**用它來代表早期西方數學的話）則偏於「**質的數學**」。同樣都基於所謂「積分」的概念（或說「窮盡法」），中國人花費心力在找些實際的數值（如圓周率），希臘人則日夕在追求各種量與量間相等或大小的關係。

但不論其間差異如何，人類早在兩千多年前，便從概念上認識了「積分」。這是一個不爭的事實。

二、微分與積分

可是只從概念上知道一塊面積，可用多角形或小長方形的聯集來逼近並沒有解決求積問題。窮盡法只能用來計算少數特定的圖形，如直線、圓、拋物線或 $y=x^{p/q}$ 等類曲線所圍成的區域及空間中球面、圓錐等的面積體積。至於一般的求積問題，對於十七世紀以前的人類，仍沒有一套普遍的方法。如果硬將概念與計算拆成兩個層次，**積分該說是易懂而難算。**

反過來，**微分是難懂而易算，**直到十七世紀人類才在某種特定的社會條件下認識了微分。更值玩味的是從牛頓（1642～1727）完成 *De Analysis*（約在 1696 年）及萊布尼玆(Gottfried von Leibniz 1646～1716) 在 Acta Eruditorum 發表他微積分的第一篇文章以後兩百年間，微分的計算雖已廣泛應用到數學與其他相關科學，但微分的概念仍找不到相對嚴格的定義。**可喜微分的概念雖然艱澀，但它的計算，與積分正好相反，非常簡單明白。**基於這個特點，在微分發明之後數學的發展進入了一個新的紀元。迄今數學的主要部門，連續數學（continuous mathematics）一直脫不開它的應用，甚至形式上較爲簡易的離散數

學 (discrete mathematics) 中很多分支也因借用微分計算的類推而得以發展〔註四〕。

同樣求積問題因借助微分的計算得以全面發展，這裏我們要說明的正是這一個過程。固然，所謂的微積分基本定理是介於微分與積分間的橋樑，它將求積的問題化成微分的問題，但是這條橋樑，畢竟是自然易明。**眞正難產的還是微分本身。**

三、求積問題發展中的前兩個時期

論者常將積分的發展分成三個時期:

（i） **窮盡法時期** 主要是希臘文明與十四世紀以前的中國數學文明。以多角形逼近較複雜的一塊面積，在空隙之間塡塞新的小三角形或小長方形，增加多角形的邊數。人物以劉徽、祖沖之、Eudoxus, Euclid 及 Archimedes 爲代表。

（ii） **無限求和法時期** 主要是文藝復興以後，牛頓流數論出現以前，所作的一些努力，本質上仍然是窮盡法的延續，用長方條的聯集去逼近原來圖形，但不再一味塡塞空隙，長方條本身的長度寬度都繼續在變動，以使誤差趨於 0，無限求和的概念立足於 Cavalieri 原則（1635 年），人物自 Cavalieri、村松茂清起，尙有野澤、澤口一之、John Wallis、Fermat。

（iii） **微分法時期** 自牛頓、萊布尼茲正式總結當時的微分學起，處理求積問題跨入了新的階段。

我們認爲: 從第一時期到第二時期，概念上是有了若干程度的進步。事實上，無限求和法背後已蘊藏了微分的概念，但在方法上求積問題還停留在個案處理的階段，因此就方法論的觀點來看，第一、第二兩時期仍可合併爲一個階段，我們擧了求拋物線面域的例子，分別說明兩個時期的代表人物 Archimedes 與 Fermat 怎樣計算其面積。

例 1. (西元前兩三百年 Archimedes 的求法)

設 A 爲拋物線 $y=x^{1/2}$ 與兩直線 $x=b$，$y=0$ 所圍成的面域，其面積仍用 A 代表，考慮一系列的面積（如圖 3）: $\triangle OBR$，四角形 $OBRP_1$，六角形 $OBRP_2P_1P_2'$，…… 這裏 P_1M_1 平行於水平軸，M_1 是 OR 中點，同樣 P_2M_2，$P_2'M_2'$ 平行於水平軸，M_2，M_2' 分別爲 P_1R，OP_1 中點……。我們看到這一系列的面積逐漸逼近所求的拋物線面域 A，其間空隙一步步由小小的三角形塡塞。

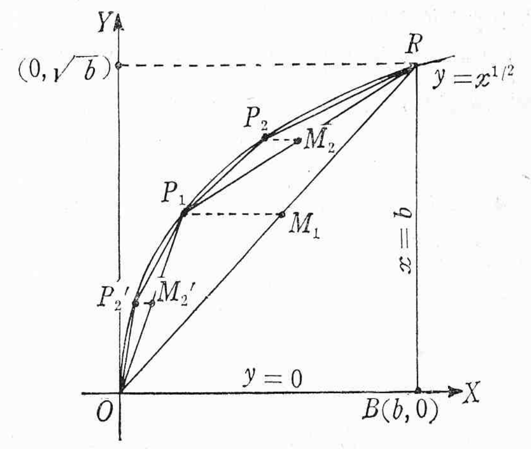


圖 3

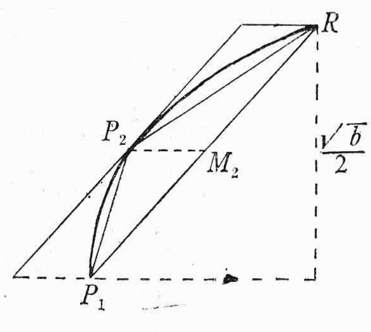


圖 3½

〔註四〕參見「數播」本期第 34 頁蔡聰明所撰"微積分與差和分大意"一文。

現在我們來算算看小三角形的面積，比如說取 $\triangle P_1P_2R$. Archimedes 在他的 *Quadrature of the Parabola* 一書中觀察到拋物線過 P_2 點的切線恰好平行於 P_1R，易知

$$\triangle P_1P_2R=\frac{1}{8}\triangle OP_1R$$

〔若直接用座標計算，亦得：$R=(b,\sqrt{b})$，$M_1=(b/2,\sqrt{b}/2)$，$P_1=(b/4,\sqrt{b}/2)$，$M_2=(5b/8,3\sqrt{b}/4)$，$P_1M_1=b/4$，$P_2M_2=b/16$，而知 $\triangle OP_1R=\sqrt{b}\cdot 1/2\cdot b/4$，$\triangle P_1P_2R=1/2\cdot b/16\cdot\sqrt{b}/2=\triangle OP_1R/8$〕，這個關係在逐步逼近時仍然保持，因此 A 的計算變成了求等比級數的問題，得

$$\begin{aligned}A&=\triangle OBR+\triangle OP_1R+2\triangle P_1P_2R+\cdots\cdots\\&=\frac{1}{2}b\sqrt{b}+\left\{\frac{1}{8}b\sqrt{b}+2\cdot\frac{1}{8^2}b\sqrt{b}+4\cdot\frac{1}{8^3}b\sqrt{b}+\cdots\cdots\right\}\\&=\frac{2}{3}b\sqrt{b}\end{aligned}$$

雖然限於當時的條件，Archimedes 對上述無限級數的求和的過程不太嚴格，但他的估計值是對的。

例 2. (十七世紀初 Fermat 的求法)〔註五〕

與例 1 同樣，A 是由拋物線 $y=x^{1/2}$ 與 $x=b$，$y=0$ 圍成的面域。(如圖 4)

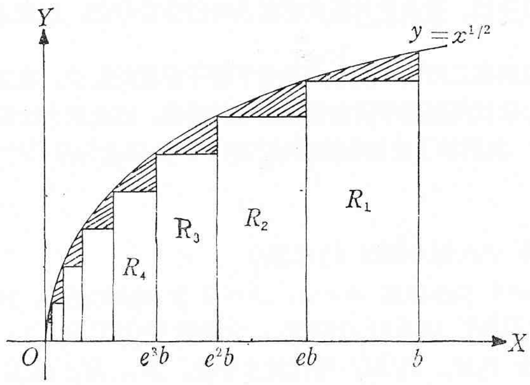


圖 4

可以看出

$$R_1+R_2+R_3+R_4+\cdots\cdots$$

在逼近於 A，這裏 e 是一個接近於 1 但小於 1 的數，當 e 越接近 1 時，空隙的陰影部份會越來越小(讀者不妨先取 $e=0.9$，再取 $e=0.99$，畫圖比較看看)。現在先固定取好 e 值，得

$$\begin{aligned}&R_1+R_2+R_3+R_4+\cdots\cdots\\&=(eb)^{\frac{1}{2}}\cdot b(1-e)+(e^2b)^{\frac{1}{2}}\cdot eb(1-e)+(e^3b)^{\frac{1}{2}}\cdot e^2b(1-e)+\cdots\cdots\\&=e^{\frac{1}{2}}(1-e)\{1+e^{\frac{3}{2}}+(e^{\frac{3}{2}})^2+(e^{\frac{3}{2}})^3+\cdots\cdots\}b\sqrt{b}\\&=\frac{e^{\frac{1}{2}}\cdot(1-e)}{(1-e^{\frac{3}{2}})}b\sqrt{b}\\&=\frac{e^{\frac{1}{2}}(1-E^2)}{(1-E^3)}b\sqrt{b}\qquad〔取\ E=e^{\frac{1}{2}}〕\end{aligned}$$

〔註五〕Fermat 原來的計算是求 $y=x^{p/q}$ 所圍的面域，在這裏為便於比較，才取其特殊情形 $p=1$，$q=2$，但概念是一樣的。

$$= e^{\frac{1}{2}}\frac{(1+E)}{(1+E+E^2)}b\sqrt{b}$$

然後讓 e 趨於 1，這時 E 也就趨於 1，故

$$R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots \quad \text{趨近於} \quad \frac{2}{3}b\sqrt{b},$$

此即

$$A=\frac{2}{3}b\sqrt{b} \qquad \text{〔結果與 Archimedes 計算一致〕}$$

現在我們將這兩個時期的求積方法做個一般的說明：對於一塊面域 A，如果邊界曲線是連續的話，那麼取一些包含於 A 的小長方形或小三角形 $R_1, R_2, \cdots\cdots$ 等，讓它們不相重疊而逐次填滿整塊面域 A 的內部：

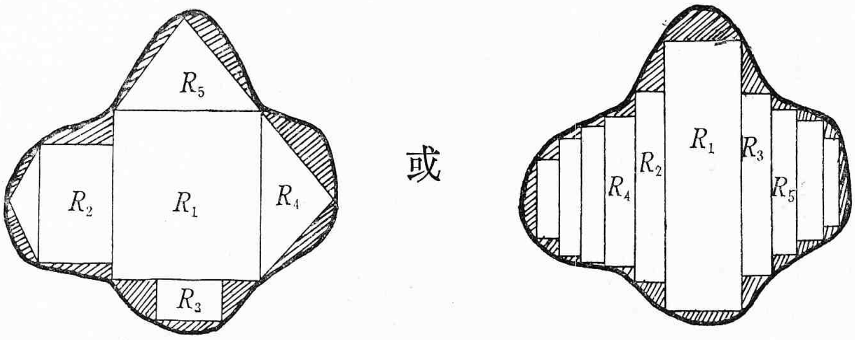


圖 5

然後設法適當調整 R_1, R_2, R_3，……等，或直接塡加新的小長方形或三角形，目的在使空隙（陰影部份）逐漸縮小而趨於烏有，而計算

$$R_1+R_2+R_3+\cdots\cdots$$

的極限值，作爲所求的面積 A。特殊的情形如該面域恰爲一條函數曲線 $y=f(x)\geq 0$ 與 $x=a$，$x=b$ 及 $y=0$ 所界定的範圍時，上述式子正好給出了所謂的 Riemann 積分的定義，即

$$A=\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\text{定義}} \lim \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

此間 $\bar{x}_i$ 爲 $f(x)$ 在區間〔x_{i-1}, x_i〕上的最小值，而 $a=x_0<x_1\cdots\cdots<x_n=b$，且極限 lim 是指在 $\min\{x_i-x_{i-1} \mid i=1,\cdots\cdots,n\}$ 趨於 0 時，長條和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

的極限值。

雖然這是一個良好的積分定義，但要實際求出 $R_1+R_2+\cdots\cdots$之值，通常非常困難，只當面域 A 相當特別時，才可望設計一個可行的算法。上述例子 Archimedes 與 Fermat 的求法所以成功，是因爲在拋物線的情形下，長條和可以化成等比級數來求。若邊界是其他曲線時，長條和就不見得這般容易計算。

四、動態處理的基礎

求積問題是改用動態的處理方式才得到普遍方法的。換句話說，力學刺激了「微分」概念的產生，而求積問題便依賴微分而得以解決。

設有一變量 s，因時間 t 而變，（牛頓原來稱 s 爲 fluent）。那麼 s 對於時間的變化率 $\dot{s}$，便稱爲 s 對 t 的「微分」(derivative, 牛頓流數論中稱它爲**流數** fluxion)。比如說某質點在一條座標直線上運動，$s=s(t)$ 表示 t 時刻這質點 P 的座標，（如圖6）

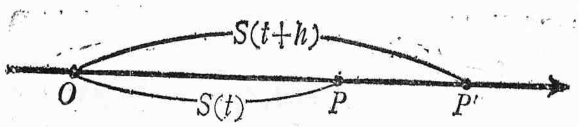


圖 6

通常稱這種意義下的 s 爲位移 (displacement)，那麼 s 的變化率 $\dot{s}$ 便是所謂的**速度**。

但速度與位移有什麼關係？如果質點是等速在運動時，每一時刻 t 的速度都一樣是

$$\dot{s}(t)=\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \tag{1}$$

其中 h 是任意截取的時間區段。也就是從 P 走到 P' 的距離（往右爲正，往左爲負）除以所花的時間 h。

但運動不一定等速時，(1) 式右端

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

這個量，與所取的 h 的長短有關，這個量稱爲牛頓商 (Newton quotient)，事實上這個商代表的是自 t 時刻起在 h 時間內的**平均速度**。這段時間內速度仍然有快有慢，若要考慮 t 時刻的瞬間速度，所取的時間 h 應該越短越好，但短到什麼程度呢？ 1 秒嗎？ 0.1 秒嗎？ 0.01 秒嗎？即使是取 0.01 秒，在這短暫的 0.01 秒間，如果碰上精密的質點運動，仍可能快慢交迭了許多次，因此還不好就取它來代表 t 時刻的瞬間速度，最後牛頓、萊布尼茲及其同時期的人，引入了無限短時間的概念，而指說速度便是在那無限短時間內的變化率。可是這個無限短（或無限小 infinitesimal）的概念事實上有很多爭議（萊布尼茲用 monad 這個字來描述它），反對派的抨擊相當強烈而持續了幾近一個半世紀，主要來自教會（以哲學家 Berkeley 主教爲代表）。不管怎樣，等到實數的嚴格基礎建立，**極限**有了清礎的定義以後，一般人已經接受了用牛頓商的極限作爲速度的說法，或說：t 時刻的瞬間速度 $\dot{s}(t)$ 便是

$$\frac{s(t+1)-s(t)}{1},\quad \frac{s(t+0.1)-s(t)}{0.1},\quad \frac{s(t+0.01)-s(t)}{0.01},\quad \frac{s(t+0.001)-s(t)}{0.001}$$

這個數列的極限〔註六〕，嚴格地寫下來

$$\dot{s}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

對於一般的函數 $y=f(x)$，考慮 y 對 x 的變化率時，我們也下這樣的定義:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2}$$

當 $y=f(x)$ 是一些基本函數，如多項式、三角函數、指數函數及它們的反函數拼在一起的函數時，(2)式是容易計算的。例如用二項定理，人很快算出來當 $f(x)=x^2$ 時

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

〔註六〕關於速度的定義 Feynman 有較生動的解釋，參見徐氏基金會出版費因曼物理學第一冊第一章。

當 $f(x)=x^m$ 時

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x^m+mhx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}h^2x^{m-2}+\cdots+h^m\right)-x^m}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(mx^{m-1}+h\{\cdots\cdots\})=mx^{m-1}$$

我們導出了三個微分的基本運算法則，知道

(i) $(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$ 〔指明微分的操作是線性的〕

(ii) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 〔所謂 Leibniz 法則〕

(iii) $\frac{d}{dx}f(g(x))=\left[\frac{df}{du}\right]_{u=g(x)}\cdot\frac{dg}{dx}$ 〔所謂連鎖法則 chain rule〕

從而算得微分表如下

$f(x)$	x^α（α 爲任意非零實數）,	$\sin x$,	$\cos x$,	$\tan x$,	e^x,	$\log x$,	$\sin^{-1}x$,	$\tan^{-1}x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	, $\cos x$,	$-\sin x$,	$\sec^2 x$,	e^x,	$1/x$,	$1/\sqrt{1-x^2}$,	$1/(1+x^2)$

將這個表又配上三個基本運算法則，我們可以計算所有基礎函數的微分。微分竟是這樣容易計算的東西。

現在我們回到主題。看看微分法又怎樣把我們的求積問題化成動態的處理。

五、用微分法求積

設有一塊面域A，邊界爲連續曲線。我們跨過了窮盡法與無限求和法兩段時期，進入用微分法時期。我們開始要說明微分法發明以後，求積問題怎樣獲得解決。

假想 A 上覆有布幔，開始時將布幔等速往右拉開，就像舞臺幕啓一樣，漸次露出面域內的部份，直到整塊面域 A 完全呈現出來爲止。

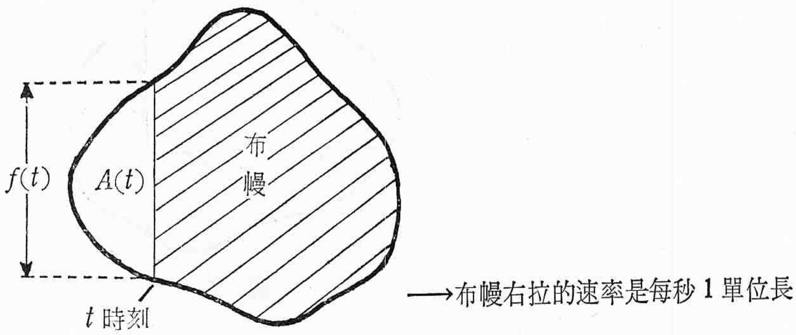


圖 7

假設往右拉幕的速度是單位速度，即每秒固定拉開 1 個單位長。而拉幕時間是自 $t=a$ 到 $t=b$，將 t 時刻已呈露的面積記爲 $A(t)$。此時布幔相應的高度記爲 $f(t)$。（見圖 7）一個有趣的事情是

「$f(t)$ 便是 $A(t)$ 對時間 t 的變化率（或稱微分）！」

這個看來簡易的事情是解決整個問題的節眼， 後人尊稱它叫「微積分基本定理」(fundamental theorem of calculus)，用式子寫下來便是

$$\frac{dA}{dt}=f(t) \qquad (1)$$

牛頓的名著 *De Analysi*（成書於 1669，遲至 1711 才發表）開頭第一句話便寫這事的特例:

$$\text{Si } ax^{m/n}=y,\ \text{erit } \frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}=\text{area } ABCD \tag{2}$$

（意即設 $ax^{m/n}=y$，則可寫……）。現在我們來解釋 (1) 式，微積分基本定理成立的理由:

（i） $A(t+h)-A(t)$ 表示 t 時刻起 h 時間內所露出的面積，易知這塊面積夾在下圖（圖 8）中內外兩長條面積之間，即

$$m\cdot h \leq A(t+h)-A(t) \leq M\cdot h \tag{3}$$

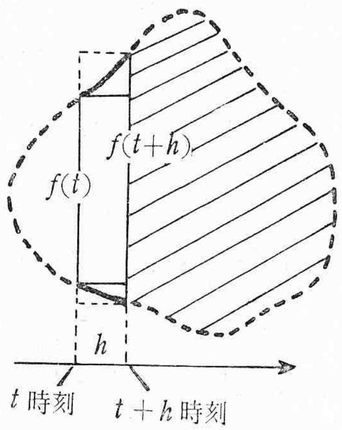


圖 8

其中 M 與 m 分別爲布幔高度 $f(t+k)$ 在 $0\leq k\leq h$ 中的最大值與最小值。依圖 8 所繪，M 恰巧是 $f(t+h)$，m 恰巧是 $f(t)$，這只是巧合，一般時候還是將面域用水平與鉛垂直線分割成三五個面域，如圖 9 中:

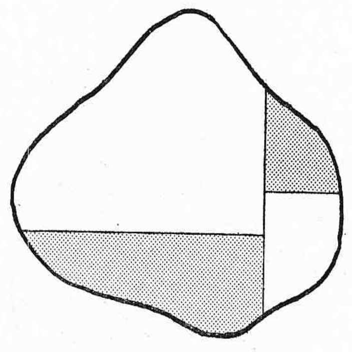


圖 9

分成 4 塊，逐個去討論比較清楚。因爲這樣一來，$A(t+h)-A(t)$ 的上緣或下緣，必有其一爲水平，故 (3) 式顯然成立。

（ii） 當 h 趨於 0 時，因邊界曲線連續，故 $f(t)$ 爲 t 的連續函數，可得 M 與 m 皆分別趨於 $f(t)$，今將 (3) 式三項都分別除以 h，得

$$m \leq \frac{A(t+h)-A(t)}{h} \leq M$$

但因 m 與 M 皆趨於 $f(t)$，故所夾牛頓商也趨於 $f(t)$，此即微積分基本定理

$$\frac{dA}{dt} \equiv \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}=f(t)$$

這個結果爲懸決千年的求積問題提出了一條有力的線索。當我們對面積函數 $A(t)$ 一籌莫展時，我們卻知道了 $A(t)$ 對 t 的變化率就是那幕高 $f(t)$，於是問題開始明朗，設想先量得 $f(t)$，於是從微分表中去找個 $F(t)$，使

$$\frac{dF}{dt}=F'(t)=f(t)$$

再將它與

$$\frac{dA}{dt}=f(t)$$

比較，由微分是線性操作一事，考慮相差函數 $A(t)-F(t)$，知

$$\frac{d(A-F)}{dt}=\frac{dA}{dt}-\frac{dF}{dt}=f(t)-f(t)=0$$

故 $A(t)-F(t)$ 的變化率常爲零，那麼 $A(t)-F(t)$ 只好是個常數。(想想速度恆爲 0 的質點是不動的，故其位移函數是常數!)

此即

$$A(t)=F(t)+C$$

其間 C 爲常數。最後再由始初情形來決定 C，亦卽由

$$0=A(a)=F(a)+C \qquad \text{〔布幔在 } t=a \text{ 時啓幕，故 } A(a)=0\text{〕}$$

得 $C=-F(a)$，而總結得到，所求面積

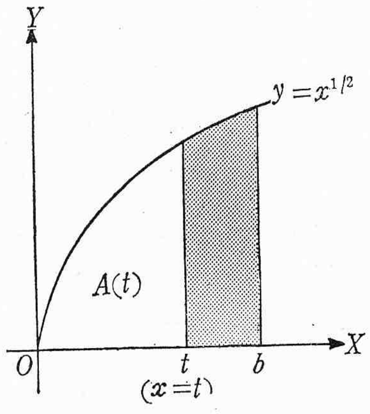
$$\begin{aligned} A&=A(b) && \text{〔布幔在 } t=b \text{ 時，} A \text{完全呈露，故} A(b)=A\text{〕} \\ &=F(b)-F(a) && (4) \end{aligned}$$

我們仍以拋物線所界面積的問題爲例，來看看這個在微分發明以後的求積方法:

例 3. (Newton, 1669 年)

求拋物線 $y=x^{1/2}$ 與 $y=0$，$x=0$，$x=b$。所界定區域的面積 A。考慮上述面積函數 $A(t)$，由於布幔拉開速度是單位速度，故 $x=t$，而高度函數

$$f(t)=f(x)=x^{1/2}=t^{1/2}$$



由微分表中查知: $\qquad t^{3/2}$ 的微分是 $(3/2)\cdot t^{1/2}$

故 $\qquad (2/3)\cdot t^{3/2}$ 的微分是 $t^{1/2}$

因此 $A(t)$ 與 $(2/3)\cdot t^{3/2}$ 的微分都一樣是 $t^{1/2}$，故

$$A(t)=\frac{2}{3}t^{3/2}+C$$

當 $t=0$ 時，$A(0)=0$，故 $C=A(0)-(2/3)\cdot(0)^{1/2}=0$，得

$$A(b)=\frac{2}{3}b^{3/2}=\frac{2}{3}b\sqrt{b} \tag{5}$$

細心比較一下，從 Archimedes、Fermat 到 Newton 三個時期的做法，一個時期比一個時期進步，用 Archimedes 的方法雖能處理拋物線界下的面積，但對

$$y=x^{p/q} \qquad (p, q \text{ 為任意整數})$$

所界下的面積，就有困難。若用 Fermat 的方法，固然可以順利處理這個 $y=x^{p/q}$ 所界下的面積，但要處理 $y=x^{\alpha}$（α 為無理數）或任意有理函數曲線

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad [P(x) \text{ 與 } Q(x) \text{ 皆為多項式函數}]$$

或一般正弦函數、指數函數等基本函數曲線所界下的面積，則又無能為力。**這就是方法論進化的意義。人類處理問題的能力，常常這般由個案到一般，逐步提升，逐步發展，**微分法的發明使我們能夠一併處理很多求積問題。（讀者讀到這裡，不妨做做文末所做附的習題，再回來本文。）

求積問題到此已經知道可以化簡為：給定函數 $f(x)$ 想找函數 $F(x)$，使得 $F(x)$ 的微分恰好等於 $f(x)$ 的問題。要找這樣的 $F(x)$，以後便說是要積分 $f(x)$，或說要找 $f(x)$ 的積分 $F(x)$。我們用

$$F(x)=\int f(x)dx \qquad [\text{不定積分}]$$

來表示 $F(x)$ 與 $f(x)$ 存在着

$$\frac{dF}{dx}=f(x)$$

的關係。若要改用這套定積分（見第三節末尾 Riemann 積分的定義）、不定積分與微分的語言，前面已經說明過，求積問題的關鍵便可以寫成

（i） $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t f(x)dx=\dfrac{dA}{dt}=f(t)$

（ii） 設 $\dfrac{dF}{dx}=f(x)$（亦即 $F(x)=\displaystyle\int f(x)dx$），則

$$\int_a^b f(x)dx \equiv A=A(b)=F(b)-F(a) \qquad [\text{見第五節(4)式}]$$

這便是通常教科書上所寫的微積分基本定理的式樣。

如果 $y=f(x)$ 是太複雜的組合，想從微分表中直接看出 $f(x)$ 的不定積分 $F(x)$ 便不太容易，這時我們根據了微分的三個基本操作法則得到積分的三個基本操作法則：

微分線性法則	$\longrightarrow$	積分的線性法則
微分的 Leibniz 乘積法則	$\longrightarrow$	積分的部份積分法
微分的連鎖合成法則	$\longrightarrow$	積分的變數變換

因此積分的計算操作完全是微分計算的附庸。對於大部份的基本函數，我們都可通由上節所列的微分表及這三個基本操作法則，來求它們的積分。有趣的是，一個函數若不能依此途徑求取積分的話，那麼求它的積分，方法上就突然變成極端困難。例如

$$\int \sin x^2 dx \qquad \text{或} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx$$

這也就說明了求積問題極端依賴微分計算的本質。

六、求積問題的歷史意義

看到前面求積問題這樣綿延兩千年的進展過程，有人或許要想到三等分角的問題。三等分角的問題）代表柏拉圖三大幾何難題）固然也懸決兩千年而在十八世紀才被解決，證明它不可能有解。但兩個問題，在人類文明史上的意義有若天地雲泥之別，截然不同。

求積問題來自社會發展的實際需要，各民族都不約而同長時間在爲它獻出心力。但三等分角則來自希臘雅典時期柏拉圖一干人的智力遊戲，柏拉圖不曾正視社會需要，自己限制作圖的工具來束縛自己，中國人、印度人、日本人在同程度文明的時間裏，並沒有出現這類問題。沒有任何一個好的數學家，任何一個明白數學功用的數學工作者，對這一類問題發生過興趣。

求積問題在兩千年求解的過程中，不斷提供了一系列的方法與概念，刺激數學往高處發展；窮盡法產生了人類對極限概念的初期認識，對於實數論的產生有一定的作用，無限求和法更引起人類去探求無限級數的求和，這些都成爲今日數學分析的主題。另一方面，求積問題也大大推展了幾何學的發展。

可是三等分角問題，自柏拉圖提出以來，兩千年間看不出對於數學進展有何貢獻，若有，那便只是基礎的平面幾何上圓與直線的關係罷了。甚至當它得到解決時，也不是因要解決它而得解決。作爲代數學主流的方程式論，發展到一定階段，有了拓廣體的概念後，三等分角的問題只成了一個輕鬆的習題，便被證明爲不可解了。

比較求積問題與三等分角問題的歷史發展，對於數學的社會功用這項長年受到爭議的論題，會幫助我們得到若干有力的啓示。

對數學史有興趣的人，也可以從這段求積問題的進展中窺知人類文明史中一些重要的概念與方法如何得來。這個問題，網羅了十七世紀以前兩千年來所謂「最優秀」的頭腦，但它的成長從今天看來，竟是這般遲緩！假如牛頓生在 Archimedes 的時代，不可能就比 Archimedes 突出多少，更不可能在那時的背景下發明微分。微分的概念來自力學，來自哥白尼（Copernicus），刻卜勒（Kepler）以前長年纍積下來的天文資料。天文觀察需要工技方面的配合，工技的成熟需要像文藝復興時期背後種種社會與經濟的條件，**沒有這些條件，便沒有牛頓的流數論**。反過來，如果這些條件已經成熟，就是牛頓不出生，也有萊布尼茲，沒有萊布尼茲也有其他人會發明微積分。

同樣，設使這些條件出現在中國，微積分便會孕育在中國，劉徽、祖沖之、秦九韶、沈括都可能變成牛頓，變成萊布尼茲。

數學的發展與社會發展的需要及當時已具備的條件息息相關，如果沒有這些成熟的背景，世界上不論哪個天才，哪個民族，都不可能爲人類文明帶來像微積分這般重大的進展。

習　題

(1) 用 Fermat 的方法計算

$$y=x^{p/q} \qquad (p, q \text{ 皆爲整數})$$

與 $y=0$，$x=0$，$x=b$ 所界定的面積，並試著改用 Archimedes 的方法看看能否求得？

(2) 用微分法，計算

(i) $y=x^{\sqrt{2}}$

(ii) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 〔提示：利用連鎖法則，並注意 $\log(x^2+1)$ 的微分。〕

(iii) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 〔提示：利用分項分式及線性法則。〕

與 $x=0$，$x=1$ 及 $y=0$ 所界定的面積，並試著用 Fermat 的方法看看能否求得?

(3) 用微分法，計算

(i) $y=\sin x$ 與 $y=0$，$x=0$，$x=2\pi/3$

(ii) $y=2^x$ 與 $y=0$，$x=0$，$x=1$

所界定的面積。

主要參考資料

1. 傅溥譯：李約瑟 (Joseph Needham) 著中國之科學與文明第四課，臺灣商務印書館。
2. Dubbey, J. M., *Development of Modern Mathematics* Butterworths (1970), London.
3. Kline, M., *Mathematics Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford (1972), New York.
4. Libbrecht, U., *Chinese Mathematics in the 13 Century*, MIT Press (1973), Cambridge and London.
5. Smith, D. E. & Kami, M., *A History of Japanese Mathematics*, Chicago (1914).