

數學本質與數學教育

李 國 偉

本文作者現任職於本所

本年度大專聯考的數學試題，對一般習於解難題而不求貫通觀念的考生，是比較陌生而出乎意料之外的。當然程度真正好的與程度真正壞的，成績之間仍然有十分顯著的差距。但是程度平平與完全放棄數學的，因為分數都掉向零分這一端，便很難比出實在的高下了。固然命題人對於題目的選擇，考生程度的估計，以及考生心理狀態的觀照等等，都有商榷的餘地，但是輿論的矛頭如果只指向命題人與試題，那麼實在沒有扎到問題的要害。本屆大專聯考數學的成果，其實只是再一次反映出我國中學數學教育的病態：一方面認不清數學的本質，把不穩數學教育的方向；因此另一方面就不能體認出中學階段數學訓練的必要，對數學教育的作用喪失了信心。

「數學傳播」第五期中，逢甲學院廖同學來信裏的一段話，是很值得人深省的：（見該期一〇四頁）

「國中時我和許多厭惡數學的同學高喊『數學無用論』，振振有詞的說：『敢問諸君，素日所學，用之何地？購物？買賣？非也，殺鷄焉用牛刀，整日混在行列式、方程式、三角形、圓形、矩形、垂心、重心，……能混出什麼名堂？』當時被問的瞠目結舌者不乏其人，甚至引起陣陣的共鳴，不過也有人反言道：『數學可訓練思考力，創造力云云。』或者加上數學老師的解釋：『數學像遊戲。』我等則反譏道：『練腦力、玩遊戲，吾寧可下象棋、打橋牌，功效相同，而無其苦，何樂不為？』終於於國中時期無論師友皆未能闡明讀數學的真諦。（也許是我運氣不好，或者沒有遇到高明者）

時轉物移，目前我已是大二學生，經歷一串挫折後深感『覺今是而昨非』，所幸『實迷途其未遠，知來者之可追。』以往處於殺鷄階段不屑學牛刀，一但面對殺牛時期，對陣於微積分、經濟學、統計學、管理數學，以及尚未對陣的作業研究等等莫不頭痛異常，空嘆以往的不智，在中學時沒把牛刀磨利磨亮，任其腐朽。牛隻越彪然，牛刀也要越鋒利，學問研究的越高深，愈發感覺到深厚數學基礎的重要性。」

爲什麼數學一方面是許多學科的基礎知識，一方面又經常聽人喧天價響的喊「數學無用論」呢？這種矛盾的現象必須從數學這門學問的本質上去求取答案。數學絕對不是一種空想或消遣的玩物。數學最早最基本的概念，是人在改造大自然中逐漸了解、掌握及運用的數與形的直覺。然後隨著生產活動方式的多樣化，社會結構的複雜化，就在人的腦中產生了更深刻更精妙的數學概念，發展成五光十色的數學門目。它們應用的範圍涵蓋了科學與工藝，統計與訊息，醫藥與衛生，社會與政治，甚至歷史與人文。數學能有這麼多的用途，主要是因爲數學具有一項和別的學問很不同的特色，那便是「抽象性」。抽象與具體並不是截然對立的矛盾概念，它們之間有相生相成的關係。人的數學直觀是由反映具體結構具體變化中生成的。但它關心的是有多少個？這個長呢還是那個長呢？卻不關心好吃不好吃？好看不好看？用什麼材料作的？就是這種暫時與事物的物理性質和感性價值脫離的過程，使人分析出事物間深層的關聯，把對事物的認識

8 數學傳播〔論述類〕

貫通起來。於是由研究運動速度產生的數學，可以用來預測股票市場的活動；由劃分對稱圖形產生的數學，可以用來區別構成物質的基本粒子，發展出前人夢也夢不到的用途。數學的抽象性使得數學的應用成爲一種深層的應用。這是怎麼說呢？譬如人知道電鑽有什麼用，拿來鑽鋼板就行了；人也知道醫藥有什麼用，生病就少不了它。它們是與問題第一線接觸的工具與知識，它們的用途可說是肉眼直接觀察得到的。但是人在用電鑽時有沒有想到電這種神奇的東西，從富蘭克林放了風箏以後才不過兩百多年，就被人擺佈得服服貼貼的，假如人對電的基本性質沒有深入的了解能行嗎？這種了解若是當人搞不通複變函數論、偏微分方程式等等還有可能嗎？人在服藥的時候有沒有體認到，新藥物往往在實驗室作上千百次的試驗，結果必須經過統計的分析，才能了解它們所反映的性質？這些分析基礎的數學觀念涉及了實變函數論、機率等等？而上面提到的這些數學科目之間又有千絲萬縷的關係？因此數學的應用除了在像菜場買菜算錢這類極簡單的場合外，通常是間接的。但是這種間接的知識，卻是極端重要不可或缺的，因此也就是前面所謂的深層的應用。有了這種了解以後，我們發覺「數學無用論」實在是一種十分淺薄的論調，持這種論調的人或多或少具有一種商場的現實心理，希望一塊錢拿出去，馬上拿回一塊錢的東西。然而教育是百年樹人的永久事業，這種短視心理無異於殺雞取卵，十數年後便會產生真正人才匱乏的現象。

現在我們來談談中學數學教育的意義。

中學數學教育的作用主要有二：第一、儲備必要的數學知識；第二、心智的鍛鍊。前者的重要在體會出數學廣泛而深層的應用性後，便是不辯自明的道理了。用廖同學生動的比喻，就是努力磨利牛刀，即使現在割小雞，畢竟總有屠牛的一日。至於後者對於日後不直接使用數學的人更爲要緊，讓我們再加闡述一下。

表面上看起來要鍛鍊智力，玩遊戲也很適合，尤其像圍棋變化實在非常複雜，就是打麻將也頗有點技巧。那麼我們爲什麼還要苦哈哈的作數學呢？又傷腦筋，又贏不了錢！其實學習數學有三個最要緊的訓練：概念的生成，概念的分析與組織，概念的運用。每一特定的遊戲所涉及的觀念都非常受局限，不可能完滿的達到上三項的訓練。其中尤其第一項最爲重要，而遊戲是最難完成這樁任務了。舉個例來說明概念生成的重要：譬如人由千變萬化的運動物體中，逐漸了解了速度這個有方向有數量的概念，然後由不同速度的相關運算中，體認出向量與向量空間的概念；人又發現放大或縮小向量的純量，並不必須是普通的數，而是可由一般的抽象體中取出，好比由有限數體拿來，於是人們又發覺它們上面的有限維向量空間，實在可用來創作訊息科學上的密碼。我們可以看出這個路線是很曲折而漫長的：人分析與組織已有的概念，把它們嫻熟的運用，因而有了新的憬悟，發展出更深入的概念，再去分析、組織、運用，如此周而復始繼續不斷，人對外在世界的認識便日益深刻起來，人也愈來愈會控制自然，愈來愈掌握了自己的命運，因而獲得更廣泛的自由。也許有人會反問，概念生成的訓練爲什麼非用數學不可呢？其實數學並沒有這項專利，任何一門有系統的學問，不管表面上是不是有嚴謹的邏輯結構，概念的相屬都有內在的脈絡，都可以用來完成概念生成的基本訓練。例如歷史學記錄與檢討人類生存的經驗，提供人重要的史識與史觀。研讀歷史不僅是智力也是心境的好訓練。可惜的是在中學階段，像歷史這類人文學科，學生的具體經驗與感受都非常薄弱，仍然是純粹吸收時期，自然不可「揠苗助長」。自然學科的情形比較好，但是像化學、物理，比較深入的概念，往往還是奠基於或利用數學概念。因此以中學年齡的實際程度而言，數學的訓練是最直接、最完整、而最有深度的心智訓練。尤其是有勇氣排開升學的壓力。有熱心觀照與輔導學生的中學數學教師，可以又快又有效的引導學生「發現」書本中許多概念與闡述它們之間關係的定理。假若他們再能與職業數學工作者合作的話，一些天資好用功勤的高中學生，也足以解決研究性的問題了。這種事情譬如在匈牙利就做得很好，那麼一個小國家，本世紀內已出了一大批卓越的數學家。中央研究院數學研究所編印「數學傳播」的一年中，也接觸到不少位數學優異，而且能創造發明的中學生。

我國的中學數學教育雖然弊病很深，然而尚未到萬劫不復的地步。如果我們的教育與科研領導階層以

及社會人士，能稍微深入了解一點數學的本質，尊重一點理論工作的超然性，放棄「數學無用論」的洩氣思想，並且給在學藝方面出色的中學生，如同給在歌唱、繪畫、舞蹈方面出色的中學生相當的讚譽；如果我們的數學界能在已有的聯考制度下，多體諒學生的心理，出情理兼顧的平衡考題，肯正視普遍提高社會數學程度的重要性不亞於專門研究，願意進一步掌握並闡發數學與其它學科以及應用的關係，如此雙管齊下，我們數學教育的前途還是光明的。如果我們敢驕傲的說中華民國族有優越的數理頭腦，讓我們用具體的事實來證明！