論加權冪平均函數與諸種不等式的系統化

姚雲飛 · 朱茱

摘要: 加權冪平均函數是一個用途相當廣泛的函數, 它有著良好的性質, 尤其在不等式理論研究方面"戰功卓著"。不等式理論的發展, 刺激著很多新的學科蓬勃地向前發展。本文以凸函數爲工具, 建立了關於加權冪平均函數的一系列性質, 揭示了許多著名的不等式的內在連系的規律, 且使之系統化, 論述了近年來關於指數 e 之存在性的各種證明在某種意義下同屬於一個系統。

關鍵詞: 凸函數、加權冪平均、系統、不等式、不可數集、可積、可導、連續。

一. 預備知識

定義一: 設 $f(x)$ 是定義在區間 I 上的實值函數。若 $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $\lambda \in [0,1]$, 皆恆有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

則稱 $f(x)$ 爲 I 上的凸函數 (convex function)。

引理 1: 設 $\sum_{i=1}^n q_i > 0$, $q_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$。若 $f(x)$ 爲 I 上的凸函數, 則 $\forall x_i \in I(i=1,2,\ldots,n)$ 皆恆有

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}$$

證: 由定義一與數學歸納法即可證得。

引理 2: 設 $f(x)$ 與 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積, $p(x)\geq 0, \int_a^b p(x)dx>0, m\leq f(x)\leq M$, 若 $\varphi(y)$ 在 $[m,M]$ 上爲連續的凸函數, 則

$$\varphi\Big(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\Big) \leq \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

證: 由引理 1 即可得證。

引理 3: 若 $f(x)$ 在 I 上有二階導函數, 則 $f(x)$ 爲 I 上的凸函數的 $\iff f''(x) \geq 0(\forall x \in I)$。

引理 4: 設 $\sigma > 1$, 則 $f(x) = x^\sigma$ 在 $(0,+\infty)$ 上爲凸函數。

證: $\because f''(x) = \sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2} > 0$

$\therefore$ 由引理 3 知引理 4 成立。

顯然, 由引理 4 與引理 1, 引理 2 可得下列兩個引理。

引理 5: 設 $x_i > 0$, $q_i \geq 0$, $i =$

$1,2,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^n q_i>0$, 若 $\sigma>1$, 則

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^\sigma \le \frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ix_i^\sigma}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}$$

引理6: 設 $p(x)$ 同理2, $f(x)\ge 0$ 且可積, 若 $\sigma>1$, 則

$$\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^\sigma \le \frac{\int_a^b p(x)(f(x))^\sigma dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

在引理5中, 令 $\sigma=\frac{\beta}{\alpha}>1$,$\beta>\alpha>0$, $x_i^{\frac{1}{\alpha}}=a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$, 則得

引理7: 設 $\sum_{i=1}^n q_i>0$, $a_i>0$, $q_i\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$。若 $\beta>\alpha>0$, 則

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ia_i^\alpha}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ia_i^\beta}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

其中等號成立的 $\Longleftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$。

在引理6令 $\sigma=\frac{\beta}{\alpha}>1$, $\beta>\alpha>0$, $(f(x))^{\frac{1}{\alpha}}=g(x)\ge 0$, 則有引理8。

引理8: $p(x)$ 同引理2, $g(x)\ge 0$ 可積, 若 $\beta>\alpha>0$, 則

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\int_a^b p(x)(g(x))^\alpha dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\\ \le\ &\left(\frac{\int_a^b p(x)((g(x))^\beta dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^{\frac{1}{\beta}}\end{aligned}$$

引理9: 設 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上連續, 若 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$, 且 A 與 B 為有限數, 則 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致連續。

二. 加權冪平均函數的某些性質

定義二: 設 $q_i>0$, $a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$ 皆為常數, 則稱

$$\varphi(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n q_ia_i^t}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{t}}, & \text{當}t\ne 0\text{時},\\ \left(\prod\limits_{i=1}^n a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}}, & \text{當}t=0\text{時},\end{cases}$$

為加權冪平均函數。

定義三: 設 $p(x)\ge 0$ 且連續, $\int_a^b p(x)dx>0$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續且恆正, 則稱

$$h(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\int_a^b p(x)(g(x))^t dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^{\frac{1}{t}}, & \text{當}t\ne 0\text{時},\\ e^{\frac{\int_a^b p(x)lng(x)^t dx}{\int_a^b p(x)dx}}, & \text{當}t=0\text{時},\end{cases}$$

為積分型加權冪平均函數。

註: 在抽象測度意義下定義二與定義三是可以統一到一個式子中去的, 參見 [9]。

顯見定義二、定義三有下列幾個性質:

(1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

(2) $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=\min\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=\left(\prod_{i=1}^n a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}}$

(4) $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\max_{a\le x\le b}\{g(x)\}$

(5) $\lim\limits_{t\to-\infty}h(t)=\min_{a\le x\le b}\{g(x)\}$

(6) $\lim\limits_{t\to 0}h(t)=e^{\frac{\int_a^b p(x)\ln g(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}}$

(7)$\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆一致連續。

註: 關於性質 (7), 可由性質 (1)-(6) 和引理9證得。

(8)$\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是單調遞增的。

證: 由引理7即得。

(9)$\varphi(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是單調遞增的。

證: $\forall\beta,\alpha\in(-\infty,0)$, 且 $\alpha<\beta<0$, 令 $\beta=-m_2,\alpha=-m_1,m_1>0,m_2>0\Rightarrow m_2<m_1$ 於是由引理7 $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i(\frac{1}{a_i})^{m_2}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{m_2}}\leq\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i(\frac{1}{a_i})^{m_1}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{m_1}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i(\frac{1}{a_i})^{m_1}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{-\frac{1}{m_1}}\leq\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_i(\frac{1}{a_i})^{m_2}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{-\frac{1}{m_2}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ia_i^{\alpha}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n q_ia_i^{\beta}}{\sum\limits_{i=1}^n q_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}。$$

故 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上遞增。

定理1: $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty,)$ 上是增函數。

(10)$h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數。

(11)$h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函數。

證明同 (9)。

定理2: $h(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函數。

註: (1) 此處關於 $\varphi(t)$ 的單調性證明與 [10]中不同, 此處要簡單一些。

(2) 在抽象測度意義下, 這個 $\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上爲增函數可以統一起來, 參見 [8]。

(3) 定理1與定理2特別有用, 其應用在下一節將會看到。

三. 生產不等式的“母機”

仔細觀察定義二與定義三不難發現, 當 $p(x)=1$, $q_i=1$, $i=1,2,\ldots,n$ 有下列結果:

(I) 當 $t=1$ 時,

$\varphi(1)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ (算術平均),

$h(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$ (函數平均)。

(II) 當 $t=0$ 時,

$\varphi(0)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ (幾何平均),

$h(0)=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)dx}$

(函數的幾何平均)。

(III) 當 $t=-1$ 時,

$\varphi(-1)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ (調和平均),

$h(-1)=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{1}{g(x)}dx}$ (函數的調和平均)。

顯然, 加權冪平均函數把許多種不同的求平均的方法統一起來了。同時將會在下面行文中看到加權冪平均函數不僅統一了許多平均概念, 而且把千千萬萬個不等式 (特別是著名的不等式) 統一於一身。

正如 [3]中指出的“科學家們永遠關心的是事物內部的聯繫。人們自然會想, 對任意兩個實數 α 與 β, 加權冪平均 $\varphi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 之間有什麼關係呢? 由上述特例可知有

$$\varphi(-1)\leq\varphi(0)\leq\varphi(1)\quad(據定理1)$$

$$h(-1) \le h(0) \le h(1) \quad (據定理2)$$

而這兩個不等式指出當 $(p(x)=1, q_i=1)$ $t=-1, 0$ 和 1 時三者之間的關係。這裡值得注意的是三個足標的順序和不等號順序是一致的。於是人們不禁要問: 對於一般的情況 $\alpha<\beta$ 是否有

$$\varphi(\alpha) \le \varphi(\beta) \quad , \quad h(\alpha) \le h(\beta)$$

呢? 根據定理1與定理2可以給出這個問題的一個肯定回答。現用定理的形式表述如下:

定理3: 設 $q_i>0, a_i>0, i=1,2,\cdots,n$ 若 $\alpha<\beta$, 則 $\varphi(\alpha)\le\varphi(\beta)$ 。等號只有當 n 個正數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 全相等時, 才能成立。

定理4: 設函數 $p(x)$ 與 $g(x)$ 在 [a,b]上連續且恆正。若 $\alpha<\beta$, 則 $h(\alpha)\le h(\beta)$, 而且等號只有當 $g(x)=c>0$ 之常數函數時才成立。

註: 定理3與定理4實際上是定理1與定理2的另一種表述而已。

上述兩個定理揭示了許多不等式的內在聯繫。因爲 $\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 皆是定義在 $(-\infty,+\infty)$ 上的實值函數, 由於 $(-\infty,+\infty)$ 是不可數集 (見 [9]), 且基數爲 $\aleph$, 不難發現每當在 $(-\infty,+\infty)$ 中任意拿出幾個實數來, 通過$\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 這個關係, 就得到了某個不等式。故可以說 $\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 分別是生產非積分型不等式和積分型不等式的“工作母機”。甚至可以說 $\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 是生產不等式的一座設備精良的大型現代化的“工廠”。一點也不假。下面我們將利用 $\varphi(t)$ 與 $h(t)$ 生產一些著名的不等式, 然後利用邏輯鏈條溝通彼此之間的關係, 使之系統化起來。

定理5: 若 $\alpha<0<\beta$, 則 $\varphi(\alpha)\le\varphi(0)\le\varphi(\beta)$, $h(\alpha)\le h(0)\le h(\beta)$, 即

$$\text{(I)} \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i}\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} q_i}} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\text{(II)} \quad \left(\frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\alpha}dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le e^{\frac{\int_a^b p(x)\ln_{g(x)^t}dx}{\int_a^b p(x)dx}} \le \left(\frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\beta}dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

註: 在上式 (I)、(II) 中令 $\alpha=-1$,$\beta=1$, 會得出什麼樣的結果呢?

定理6: 設 a_i,q_i 同定理5, $p(x), q(x)$ 亦同定理5。若 $\gamma=\alpha+\beta$, α、β 皆爲正數, 則

$$\text{(I)} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\gamma}dx}{\int_a^b p(x)dx} \ge \frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\alpha}dx}{\int_a^b p(x)dx} \cdot \frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\beta}dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

證: (I) 由$\gamma=\alpha+\beta$ 且 $\alpha>0$, $\beta>0$ 知 $\gamma>\alpha,\gamma>\beta$, 於是由定理1得: $\varphi(r)\geq\varphi(\alpha)$, $\varphi(\gamma)\geq\varphi(\beta)$。又 $\varphi(\alpha)>0$, $\varphi(\beta)>0$。從而有 $(\varphi(\gamma))^{\alpha}\geq(\varphi(\alpha))^{\alpha}$, $(\varphi(\gamma))^{\beta}\geq(\varphi(\beta))^{\beta}$, 故得$(\varphi(\gamma))^{\alpha+\beta}\geq(\varphi(\alpha))^{\alpha}(\varphi(\beta))^{\beta}$, 即 $(\varphi(\gamma))^{\gamma}\geq(\varphi(\alpha))^{\alpha}(\varphi(\beta))^{\beta}$ 成立。所以 (I) 成立。同理可證 (II) 亦立。

利用數學歸納法可將定理6推廣到下列情形。

系1: 設 a_i, q_i, $p(x)$, $q(x)$ 均與定理6相同, 若 $\gamma=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k, p_k>0$ $(k=1,2,\ldots,m)$, 則

$$\text{(I)}\quad \frac{\sum_{i=1}^n q_i a_i^{\gamma}}{\sum_{i=1}^n q_i}\geq\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i a_i^{p_k}}{\sum_{i=1}^n q_i}\right)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{\gamma}dx}{\int_a^b p(x)dx}\geq\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{\int_a^b p(x)(g(x))^{p_k}dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)$$

易見在定理6中分別令 $q_i=1, a_i^{\alpha}=x_i>0, a_i^{\beta}=y_i>0, i=1,2,\cdots,n, (g(x))^{\alpha}=\pi(x), (g(x))^{\beta}=Q(x), P(x)=1$, 可得著名的 Chebyshev 不等式 (在某種條件之下)。

系2: (Chebyshev不等式)

(i) 若 x_i 與 y_i 同時遞增或同時遞減 $(i=1,2,\cdots,n)$ 則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{n}\geq\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)$$

(ii) 若 $\pi(x)$ 與 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上單調性相同, 則

$$(b-a)\int_a^b\pi(x)Q(x)dx\geq\int_a^b\pi(x)dx\int_a^bQ(x)dx$$

註: 在 (i) 中若 x_i 與 y_i 單調性相反 $(i=1,2,\ldots,n)$, 則不等號反向; 在 (ii) 中 $\pi(x)$ 與 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上單調性相反, 則不等號亦反向。

系3: (Shapiro不等式) 設 $0\leq a_k<1$, $k=1,2,\ldots,n$, $S=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 則

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\geq\frac{nS}{n-S}$$

證: 由系2(i) 即可證得。

系4: 設 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可積, 且 $0\leq f(x)<1$, 則

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}dx\geq\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}。$$

證: 在系3中取 $a_k=f(\xi_k)$, $\Delta x_k=\frac{1}{n}$, $\xi_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$, $k=1,2,\ldots,n$, 並取極限即得。

定理7: (I) 設 $q_i>0$, $a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$, 則

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i^3}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\Big)^{\frac{1}{3}}\leq\cdots\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\Big)^{\frac{1}{m}}\leq\cdots$$

(II) 設 $a_i>0\,(i=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{n}\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3}{n}\Big)^{\frac{1}{3}}\leq\cdots\leq\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^m}{n}\Big)^{\frac{1}{m}}\leq\cdots$$

(III)$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right| \le \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{n} \le \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$

證: (I) 由定理1即得。(II) 在 (I) 中令 $q_i=1, i=1,2,\ldots,n$, 即得。(III) 在 (II) 中令 $a_i=|x_i|$ 即得。

定理8: 設 $g(x)$ 與 $J(x)$ 在 $[a,b]$上連續。若 $P>1$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 則

$$\text{(I)}\quad \int_a^b|g(x)J(x)|dx\le\left(\int_a^b|J(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b|g(X)|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}\quad\text{(Hölder)}$$

$$\text{(II)}\quad \left(\int_a^b|g(x)+J(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|J(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(MinKowski)

註: (1) 利用定理5即可證得定理8(I), 該定理 (II) 由本定理 (I) 即可推出。

(2) 若 $0<p<1$, 則定理8(I) 與 (II) 的不等號反向。

(3) 若 $p=q=2$, 則 (I) 式便爲 Cauchy 不等式。

定理9: 設 $q_i>0, a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$, 則

$$\text{(I)}\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{q_i}{a_i}}\le\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}}\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i},$$

$$\text{(II)}\quad \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{q_i}{a_i}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\le\prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\le\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{\sum\limits_{i=a}^{n}q_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i},$$

$$\text{(III)}\quad \prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\le\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}q_i},$$

$$\text{(IV)}\quad \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\le\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\le\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i},$$

$$\text{(V)}\quad \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$\text{(VI)}\quad \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}。$$

證: 由定理1 $\Rightarrow\varphi(-1)\le\varphi(0)\le\varphi(1)$ $\Rightarrow$(I) 。顯然有 (I)$\Rightarrow$(II)$\Rightarrow$(III)。由 (I)$\Rightarrow$(IV), 由 (III)$\Rightarrow$(V), 由 (I)$\Rightarrow$(VI)。

特別在 (IV) 中, 令 $n=3, a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$, 則對任意的三個正數 x,y,z 有:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\le x^xy^yz^z\le\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}\ (見[3]p.61)$$

値得注意的是利用這個不等式左端可推得若 $a>0, b>0, c>0$, 則

$$a^ab^bc^c\ge(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}。$$

系1 (Bernoulli不等式): 設 $x>-1$,

(i) 若 $0<\alpha<1$ 時, 則 $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x$。

(ii) 若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 則 $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x$。

證: 由定理9(V) 可知系1成立 (見[3]p.33)

系2: 若 $a>1, n>1$, 則 $a^n>1+n(a-1)$。

系3: 若 $b>1$, 則 $0<b^{\frac{1}{n}}-1<\frac{b-1}{n}$。
註: 系2可由系1證得, 系3可由系2證得。

系4([3]): 設 $a>0, b>0$, 若 $a\neq b$, 則

$$ab^n<\Big(\frac{a+nb}{n+1}\Big)^{n+1}$$

證: 由定理9(V)$\Rightarrow$ $\sqrt[n+1]{ab^n}<\frac{a+nb}{n+1}$

$$\Rightarrow ab^n<\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}$$

系5: 設 $0<\alpha<\beta$, 若 n 爲自然數, 則

(i) $\beta^{n+1}>\alpha^n[(n+1)\beta-n\alpha]$,

(i) $\alpha^{n+1}>\beta^n[(n+1)\alpha-n\beta]$,

(iii) $(n+1)\alpha^n(\beta-\alpha)<\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}<(n+1)\beta^n(\beta-\alpha)$,

(iv) $\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}<(n+1)\beta^n$。

證: 在系4中, 若 $a>b>0$, 則取 $\alpha=b(n+1)$, $\beta=a+nb$, 可得 $[(n+1)\beta-n\alpha]\alpha^n<\beta^{n+1}\Rightarrow\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}<(n+1)\beta^n(\beta-\alpha)$。

若 $b>a>0$, 取 $\alpha=a+nb$, $\beta=b(n+1)$, 則 $\beta>\alpha>0$, 由系4知 $\alpha^{n+1}>\beta^n[(n+1)\alpha-n\beta]$, 於是有

$$\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}<(n+1)\beta^n(\beta-\alpha)。$$

由上述推理知當 $\beta>\alpha>0$, n 爲自然數時有

$$(n+1)\alpha^n(\beta-\alpha)<\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}<(n+1)\beta^n(\beta-\alpha)。$$

故 (i)、(ii)、(iii) 成立, 由 (iii) 即可得 (iv)。證畢。

註: 此處證明系5之所以採取這種方法, 意在系統化。

系6(i): 設 $p_i>0, a_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$ 若 $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1$, 則

$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\leq p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$。

(ii) 設 $p>1, a>0, b>0$, 若 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 則

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q。$$

證: 由定理9(III) 即可證得系6成立。

系7 (Hölder): 設$p_i>0$, $a_{ji}>0$, $b_{ji}>0$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$。若 $\sum\limits_{i=1}^n p_i=1$, 則

$$\text{(i)}\quad \sum_{j=1}^m\Big(\prod_{i=1}^n a_{ji}^{p_i}\Big)\leq\sum_{i=1}^m\Big(\prod_{j=1}^n a_{ji}\Big)^{p_i},$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{j=1}^m\Big(\prod_{i=1}^n b_{ji}\Big)\leq\sum_{i=1}^n\Big(\prod_{j=1}^m (b_{ji})^{\frac{1}{p_i}}\Big)^{p_i},$$

其中等號成立的充要條件爲:

$$\frac{a_{j1}}{\sum\limits_{j=1}^m a_{j1}}=\frac{a_{j2}}{\sum\limits_{j=1}^m a_{j2}}=\cdots=\frac{a_{jn}}{\sum\limits_{j=1}^m a_{jn}}。$$

證: 只要在系6(i) 中令 $a_i=\frac{a_{ji}}{\sum\limits_{j=1}^m a_{ji}}$, $i=1,2,\ldots,n$ 然後求和即得 (i)。在 (i) 中令 $b_{ji}=a_{ji}^{p_i}$ 便得 (ii) 成立。

系8 (Minkowski): 設 $a_{ji}>0$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$, 若 $\gamma>1$, 則

$$\Big[\sum_{j=1}^m(a_{j1}+a_{j2}+\cdots+a_{jn})^\gamma\Big]^{\frac{1}{\gamma}}\leq$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{j1}^{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\gamma}}+\cdots+\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{jn}^{r}\Big)^{\frac{1}{r}}$$

系9: 若 $p_1>0,p_2>0,p_1+p_2=1$, $b_{j1}>0$, $b_{j2}>0$, 則

$$\sum_{j=1}^{m}b_{j1}b_{j2}\le\Big(\sum_{j=1}^{n}(b_{j1})^{\frac{1}{p_1}}\Big)^{p_1}\Big(\sum_{j=1}^{n}(b_{j2})^{\frac{1}{p_2}}\Big)^{p_2}$$

註: (1) 系8與系9的證明可直接由系7推得。

(2) 當 $p_1=\frac{1}{m+1},p_2=\frac{m}{m+1}$ 時, m 爲自然數, 則又可得另一特殊形式的而又有用的一個不等式。

系10: 設 m 是自然數, $b_{j1}>0$, $b_{j2}>0$, $j=1,2,\ldots,n$, 則

$$\sum_{j=1}^{n}b_{j1}b_{j2}\le\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{j1}^{m+1}\Big)^{\frac{1}{m+1}}\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{j2}^{\frac{m+1}{m}}\Big)^{\frac{m}{m+1}}$$

註: 若在系10中令 $b_{j1}b_{j2}=A_j$, $B_j=b_{j2}^{\frac{m+1}{m}},j=1,2,\ldots,n$, 則 $A_j>0$, $B_j>0,b_{j1}=B_j^{-\frac{m}{m+1}}A_j$, 從而得到:

系11 (權方和不等式 [7]):

$$\frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\Big)^{m+1}}{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}B_j\Big)^{m}}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{m+1}}{B_j^{m}},$$

其中等號成立的充要條件是 $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\cdots=\frac{A_n}{B_n}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}A_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}B_j}$。

註: 這裡推得權方和不等式成立所用的方法與 [7]中的方法不同。這裡不但證得其成立, 而且將其納入了 Hölder 不等式系統之中。

系 12([2]: 爲了行文方便, 這裡稱系12爲王勤國不等式): 若 $\alpha_i>0,\beta_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 則

$$\text{(I)}\quad\Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2}\cdots\Big(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\Big)^{\alpha_n}\le\Big(\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n},$$

$$\text{(II)}\quad\Big(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\Big)^{\alpha_2}\cdots\Big(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\Big)^{\alpha_n}\ge\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}。$$

特例: 當 $n=2$ 時有

$$\text{(i)}\quad\Big(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2}\ge\Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2},$$

$$\text{(ii)}\quad\Big(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\Big)^{\alpha_2}\ge\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2},$$

其中等號成立的充要條件是:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_n}{\alpha_n}。$$

證: 在定理9(III) 中設 $\alpha_i=q_i,\beta_i=q_ia_i,i=1,2,\cdots,n$ 則得 $0<\beta_i=q_ia_i=\alpha_ia_i$ 知 $a_i=\frac{\beta_i}{\alpha_i}$。故系12成立。

系13: 設 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},a_i>0,i=1,2,\cdots,n$, 則當 $p>1$ 時有

$$\sum_{n=1}^{m}A_n^p\le\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{m}A_n^{p-1}a_n。$$

系14 (Hardy 與 Laudan 不等式): $p>1,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$, 則

$$\sum_{n=1}^{m}A_n^p\le\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sum_{i=1}^{m}a_i^p。$$

系15 (Garleman): 若 $a_n>0,n=1,2,\cdots$,
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$。

註: (1) 系13可由系6(ii) 推得。

(2) 系14由系13與系9可推得。

(3) 系15由系14與定理9(V) 即可證得。

綜合上述可知本文建立了如此多的而又十分有用的不等式都是從 $\varphi(t)$ (或$h(t)$) 出發而得到的。若又從每一個不等式出發，則又可造出千千萬萬個不等式。如此下去，可謂"萬世不竭"啊!至此溝通了一大類著名的不等式的內在聯繫。

四、關於近年來指數 e 的存在性的證明

$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 在微積分學中被稱爲重要極限。其重要性是可以想像的。因此關於 e 之存在性的證明也頗受人們注意。近年來出版的數學書刊中分別給出了 e 之存在性的各種"不同"的證明。而這些證明的一個顯著的共同的特點就是藉助不等式來證明數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 單調遞增有上界，從而肯定 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在且爲有限。但是筆者認爲這些"不同"的證法在某種意義下是屬於一個系統。其理由如下:

[1]中分別利用了 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n\geq 1+nx$ ($x>-1, n$ 爲自然數) 和 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 給出了 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 的兩種證明。

[2]中首先利用導數爲工具建立了不等式: 若 $\alpha_i>0,\beta_i>0, i=1,2,\cdots,n$, 則

$$\text{(I)}\quad \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\leq\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\alpha_n},$$

$$\text{(II)}\quad \left(\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\geq\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}。$$

然後利用這幾個不等式給出 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在的證明。

[3]中利用了不等式 $ab^n<(\frac{a+nb}{n+1})^{n+1}$ $(a>0,b>0,a\neq b)$ 證明了 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在。

[4]中利用了不等式 $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\leq(n+1)b^n$ ($0\leq a<b$ n 爲自然數) 證明了 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在。這個方法目前有的數學分析教科書 ([5]) 已吸收。

上述諸種方法都只證得 $(1+\frac{1}{n})^n<4$, 即4爲其一個上界。事實上 $2<(1+\frac{1}{n})^n<3\,(n>1)$ 。筆者以爲就極限存在方面而言, 上述幾種證法確實有其特色。但是就具體求極限值而言，還不如利用二項式定理展開進行比較推出"3"爲其一個上界。顯然這個"3"比"4"更接近於極限值 e。從這個意義上來說，上述幾種證法皆不如利用二項式定理來證明 e 之存在性。爲了既能利用不等式證明 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在, 又能更接近於 e 之值,[6]中做到了這一點。他雖然利用了不等式 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 證明了 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 遞增, 但他得到了兩個較強的不等式:

$$\text{(i)}\ (1+\frac{1}{n})^n<(\frac{6}{5})^6<3;$$

$$\text{(ii)}\ (1+\frac{1}{n})^n<(\frac{k+1}{k})^{k+1}。$$

(k 爲某一固定自然數)

顯然 [6]中證法是有一定的優越性。至於利用二項式定理來證明 e 之存在性有關數學分析書中都有此法。這裡不再介紹。

綜合上述種種證法, 他們所用的不等式都統屬於 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} q_i}$ 的不等式之中。由 (三) 之結構簡圖知, 他們採用的不等式都可由此推出。由此可見, 若從這個意義上來說, 上述幾種證法均屬同一個系統。甚至可以說上述幾種證法“只能算一種”。其中值得一提的是 [3]之證法所用的不等式可推出 [4]中所採用的不等式。

不難發現, 由第三節之結構圖知, 我們從中摘取某一個適當形式的不等式就可以給出 e 之存在性的一個證明。(若我們能用別的方法來證明這某一個不等式成立的話。)

五. 結束語

加權冪平均函數與別的函數一樣, 是從現實世界中抽象出來的, 它雖然是一個函數, 但它的出現是客觀世界中所發生的諸過程在數學上的反映。確實如此, 不難發現加權冪平均函數有概率、力學、幾何等意義。

参考資料

1. 計惠康、許依群: 怎樣證明數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 遞增且有上界, 數學通報 (80) 第四期,P.22-23。
2. 王勤國: 數“e”存在性的又一證明, 數學通報 (82) 第四期,P.24—26。
3. 史濟懷: 平均, 人民教育出版社,1964年2月新版, P.31—36。
4. The American Mathematical Marlthly, Vol. 81., NO. 9, P.1011-1012,1974.
5. 華東師大數學系編: 數學分析 (上), 高等教育出版社,1991年3月第二版, 1994年4月第四次印刷, P.47—48。
6. 朱匀華: 數 e 存在性的一個證明, 數學通報 (84) 第三期, P.28-29。
7. 楊克昌: 權方和不等式, 數學通訊 (82) 第六期, P.32—33。
8. 姚雲飛: 凸泛函的又幾條性質及其應用, 阜陽師院學院學報自然科學版 (90) 第二期,P.32—37。
9. H. L. Royden:Reai Analysis Printed in the United States of America. sixth Printing 1966.
10. G. H. Hardy., J. E. Littlewood and G. Pölya. Inequalities. Canlbridge Univ. Versity Press. 2nd Edition 1952.

—本文作者任教於安徽省阜陽師範學院數學系—