網狀直線交點軌跡

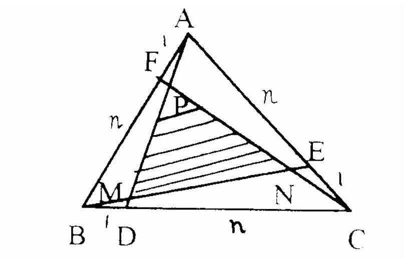
蕭健忠

摘要: 本文探討動直線交點軌跡。將三角形的重心與內心視爲動點, 分別得到一組圓錐曲線與高次的平面曲線 (如笛卡兒葉形線)。

一 緣起:

在歐陽絳先生編著的「數學大觀」一書中, 看到下面這個求面積的問題:

問題 A: 如圖 (一): $\triangle ABC$ 中, $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{EA}=\overline{AF}:\overline{FB}=1:n$, 連接 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$ 得到 $\triangle MNP$, 求 $\triangle MNP$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比。



圖(一)

本題的解法關鍵在求出 $\overline{AM}$ 與 $\overline{AD}$ 的線段比, 可利用孟氏定理得到, 或者用以下的方法:

解法 A:

(1) 設 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AD}$ ∵ B、D、C共線

$$\therefore \quad 有\overrightarrow{AD}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+n}\overrightarrow{AC}$$

$$=\quad \frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AE}$$

$$故\ \overrightarrow{AM}=t(\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n}\overrightarrow{AE})$$

$$\because\ \text{M、B、E}共線,\ 有\frac{tn}{n+1}+\frac{t}{n}=1$$

$$\Rightarrow t=\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$$

$$得\ \overline{AM}=\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\overline{AD}。$$

$$(2)\triangle ABM=\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\triangle ABD$$
$$=\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\triangle ABC$$
$$=\frac{n}{n^2+n+1}\triangle ABC$$

同理

$$\triangle BCN=\triangle ACD=\frac{n}{n^2+n+1}\triangle ABC$$

故

$$\triangle MNP=\triangle ABC-3\cdot\frac{n}{n^2+n+1}\triangle ABM$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2+n+1}\triangle ABC。$$

當 $n=1$ 時,$\triangle MNP=0$, 事實上 M、N、P 共點, 即爲 $\triangle ABC$ 的重心。M、N、P 共點這件事引起我對下面問題的興趣:

問題 B: 條件如問題 A, 當 n 改變時, M 、N 、P 是依何種路徑到達重心? (圖(二))

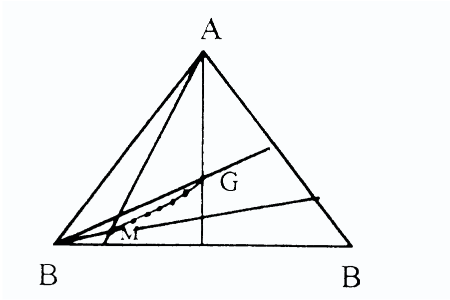


圖 (二)

二、M 的軌跡

先考慮一個特別的情形:
如圖 (三): 令 $B(0,0)$, $C(1,0)$, $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{EA}=\lambda:1$, M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, 設 $M(x,y)$:

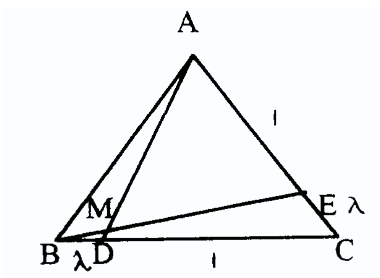


圖 (三)

由解法 A 中, 已知 $\overline{AM}:\overline{MD}=1+\lambda:\lambda^2$, 則 $\overrightarrow{BD}=\frac{\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}\overrightarrow{BA}+\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}\overrightarrow{BD}$, 又 D 的坐標爲 $(\frac{\lambda}{1+\lambda},0)$ 故

$$\begin{cases} x=\dfrac{\frac{1}{2}\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2} & (1)\\ y=\dfrac{\frac{1}{2}\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2} & (2)\end{cases}$$

(2)-(1): 得 $x-y=\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ 代入 (2), 得

$$\lambda=\frac{2y}{x-y} \qquad (3)$$

代入 (2): $(1+\lambda+\lambda^2)y=\frac{1}{2}\lambda^2$
化簡可得

$x^2+3y^2-2y=0$, 爲一橢圓。

$\therefore$ 我們知道 M 是依著橢圓軌跡到達重心。

對於任意三角形, 考慮 A 的坐標爲 (a,b), 利用相同的方法可得到 M 的軌跡方程式爲: $b^2x^2+b(1-2a)xy+(a^2-a+1)y^2-by=0$
當 $a=\frac{1}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 時, 爲一圓, 其他情形爲一橢圓。

我們有以下的結論:

解法 B: $\triangle ABC$ 中,D、E 分別爲 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{CE}:\overline{EA}$, M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, 則 M 的軌跡爲橢圓的一部分; 若 $\triangle ABC$ 爲正三角形, 此橢圓實爲一圓。

三、圓錐曲線大團圓

對於 M 的軌跡爲二次曲線, 並不令人意外, 但是, 出現橢圓後, 難免想找一找拋物線、雙曲線。我們的作法是改變 D、E 的選取方式。

仍然先考慮一個特別情形:
如圖 (四): 令 $B(0,0)$, $C(1,0)$, $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\overline{BD}:\overline{DC}=\lambda:1,\overline{CE}:\overline{EA}=k\lambda:1$, $k>0$ 爲定數,M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, 設 $M(x,y)$

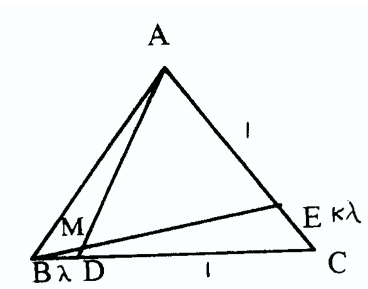


圖 (四)

則有

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{1}{2}k\lambda^2}{1+\lambda+k\lambda^2} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda+k\lambda^2} & (4) \\ y = \dfrac{\frac{1}{2}k\lambda^2}{1+\lambda+k\lambda^2} & (5) \end{cases}$$

利用問題 B 的處理方法, 我們得到方程式:
$k^2x^2+2k(1-k)xy+(2k+k^2)y^2-2ky=0$

配方得

$[kx+(1-k)y]^2+(4k-1)y^2-2ky=0$
所以,M 的軌跡為

(i) 當 $k>\frac{1}{4}$, 為一橢圓;

(i) 當 $k=\frac{1}{4}$, 為一拋物線;

(iii) 當 $k<\frac{1}{4}$, 為一雙曲線。

對任意三角形, 假設 $A(a,b)$, 得 M 的軌跡方程式為:
$[kbx-kay+\frac{1}{2}]^2+(k-\frac{1}{4})y^2-kby=0$,

所以我們有以下的結論:

定理1: $\triangle ABC$ 中,D、E 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, $\overline{BD}:\overline{DC}=\lambda:1, \overline{CE}:\overline{EA}=k\lambda:1, k>0$ 為定數, M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, M 的軌跡為

(i) 當 $k>\frac{1}{4}$, 為橢圓的一部分;

(ii) 當 $k=\frac{1}{4}$, 為拋物線的一部分;

(iii) 當 $k<\frac{1}{4}$, 為雙曲線的一部分。

在定理1中, 考慮 $\lambda<0$ 的情形, 可得到完整的圓錐曲線。

四、另起爐灶: 考慮內心的情形

問題 C: $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 的大小是 $\angle A$ 的 n 倍, D、E 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, 且滿足 $\angle EBC=n\angle DAB$, M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, M 的軌跡為?

這個問題比較麻煩, 計算的結果是, 如果 n 是正整數, M 的軌跡是 $(n+1)$ 次曲線, 這個部分我們提兩個例子:

例一: 圖 (五): $\triangle ABC$ 中, $A(0,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,0)$, D、E 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, 且滿足 $\angle DAB=\angle EBC$,M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, M 的軌跡為?

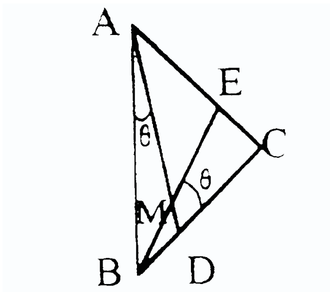


圖 (五)

答: $\angle DAB=\angle EBC=\theta, M(x,y)$:

直線 AD 與 BE 的方程式為

(1) $AD: y-1=-x\cot\theta$

(2) $BE: y+1=x\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)=\frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}\cdot x$

由 (1), $\cot\theta=\frac{1-y}{x}$ 代入 (2) 得 $(x+1)^2+y^2=2$; M 的軌跡為一圓。

事實上, 對於 $\angle A=\angle B$ 的情形, 我們可考慮圖 (六):

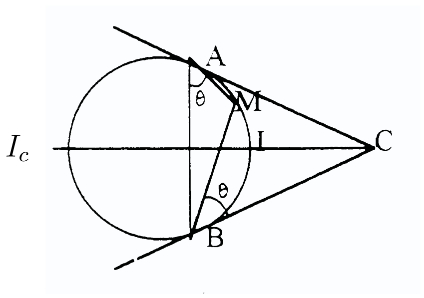


圖 (六)

圖 (六) 中, 圓 O 是 $\angle C$ 的切圓, A、B 是切點, 若 M 是圓上的任一點, 利用弦切角與圓周角的性質, 我們有 $\angle MAB = \angle MBC$; 更進一步, 若直線 OC 交圓 O 於 I 與 I_c 兩點, 則 I 是 $\triangle ABC$ 的內心而 I_c 是 $\triangle ABC$ 的傍心。

結論: 在 $n = 1$ 的情形, M 的軌跡是以內心 I 及傍心 I_c 爲直徑兩端點的圓。

例二: 圖 (七): $\triangle ABC$ 中, $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, D、E 分別爲 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, 且滿足 $\angle EBC = 2\angle DAB$, M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, M 的軌跡爲何?

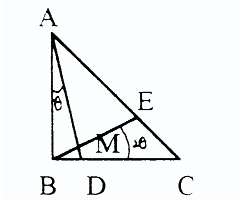


圖 (七)

答: 設 $\angle DAB = \theta, \angle EBC = 2\theta$, $M(x,y)$: 直線 AD 與 BE 的方程式爲

(1) $AD : y - 1 = -x\cot\theta$

(2) $BE : y = x\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot x$

由 (1), $\tan\theta = \frac{-x}{y-1}$ 代入 (2), 得 $y[1 - \frac{x^2}{(y-1)^2}] = 2\cdot\frac{-x}{y-1}\cdot x$, 化簡得 $x^2 = -\frac{y(y-1)^2}{2-y}$ M 的軌跡爲笛卡兒葉形線 (folium of Decartes) 圖 (八)。

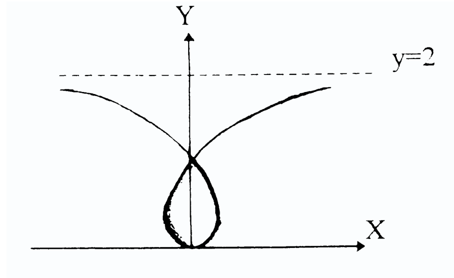


圖 (八)

五、結語:

在數學上, 動點的軌跡圖形是有趣且重要的問題, 本篇所討論的是網狀直線交點的軌跡 (圖 (九))。考慮重心的變動, 我們得到一組圓錐曲線; 考慮內心的相似問題時, 更得到高次的平面曲線, 這個結果頗令人興奮。

對於高次的平面曲線, 我們並沒有更深入的探討, 當然也是因爲太過複雜而工具缺乏的原因, 不過, 相信其中還藏著有趣的曲線。

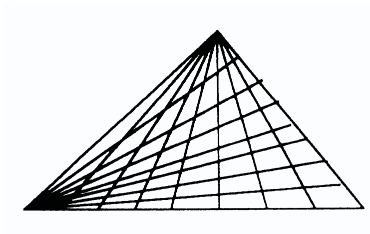


圖 (九)

參考資料

1. 歐陽絳: 數學大觀—博弈、魔術、難題、悖論 (第一卷), 曉園出版社,1993

—本文作者任教於台南市私立聖功女中—