廣義Cauchy不等式定理及其應用

張國男

衆所周知: 有時, 某極値題或不等式題可利用 Cauchy 不等式定理以解 (證) 之, 但其若干類似題則否。筆者研究發現: 由 Cauchy 不等式定理入手, 將其作適當類推, 可得廣義 Cauchy 不等式定理, 以擴大應用範圍。特撰本文爲紹介, 聊供讀者作參考。

壹. Cauchy不等式定理

茲將 Cauchy 不等式定理敍述並證明如下:

Cauchy不等式定理: 若 n 爲整數, $n \geq 2$, 而 a_{ij} 均爲實數 $(1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n)$, 且 $\vec{v}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ 均非零向量, 則 $(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^n a_{2j}^2) \geq (\sum_{j=1}^n a_{1j}a_{2j})^2$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$ 。

證一: 可分三部分推導如次:

(1) 不等式之證明, 其法不一, 茲介紹類似三種如下:

(i) 因 $a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2 \geq 2a_{1j}a_{2k}a_{1k}a_{2j}$ $(1 \leq j < k \leq n)$, 故

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^n a_{2j}^2)\\
&= \sum_{j=1}^n a_{1j}^2a_{2j}^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2)\\
&\geq \sum_{j=1}^n a_{1j}^2a_{2j}^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} a_{1j}a_{2j}a_{1k}a_{2k}\\
&= (\sum_{j=1}^n a_{1j}a_{2j})^2。
\end{aligned}
$$

(ii) 因

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^n a_{2j}^2) - (\sum_{j=1}^n a_{1j}a_{2j})^2\\
&= \Big[\sum_{j=1}^n a_{1j}^2a_{2j}^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2)\Big]\\
&\quad -[\sum_{j=1}^n a_{1j}^2a_{2j}^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} a_{1j}a_{2j}a_{1k}a_{2k}]\\
&= \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2 - 2a_{1j}a_{2k}a_{1k}a_{2j})\\
&= \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j})^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

故$(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^n a_{2j}^2) \geq (\sum_{j=1}^n a_{1j}a_{2j})^2$。

(iii) 因

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j})^2\\
&= \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2 - 2a_{1j}a_{2k}a_{1k}a_{2j})\\
&= [\sum_{j=1}^n a_{1j}^2a_{2j}^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_{1j}^2a_{2k}^2 + a_{1k}^2a_{2j}^2)]
\end{aligned}
$$

$$-[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 a_{2j}^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} a_{1j}a_{2j}a_{1k}a_{2k}]$$
$$=(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) - (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2,$$

故$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) \ge (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2$。

(2) 若 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$, 設 $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$, 即 $a_{2j} = \lambda a_{1j}(1 \le j \le n)$, 則

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) = [\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2][\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{1j})^2] = \lambda^2(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)^2,$$
$$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2 = [\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\lambda a_{1j})]^2 = \lambda^2(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)^2,$$

故 $(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2$。

另證: 若 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$, 設 $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$, 即 $a_{2j} = \lambda a_{1j}$ $(1 \le j \le n)$, 則 $a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j} = a_{1j}(\lambda a_{1k}) - a_{1k}(\lambda a_{1j}) = 0$, 故由 (1) 知

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2。$$

(3) 若

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2,$$

則由 (1) 知 $a_{1j}a_{2k} = a_{1k}a_{2j} (j \ne k)$。若某 $a_{1j} \ne 0$ 而 $a_{2j} = 0$, 則因 $\vec{v}_2$ 非零向量, 故必有 $k \ne j$使 $a_{2k} \ne 0$。由是, 得 $a_{1j}a_{2k} \ne 0$ 而 $a_{1k}a_{2j} = 0$, 此與 $a_{1j}a_{2k} = a_{1k}a_{2j}$ 矛盾! 若 $a_{2j} \ne 0$ 而 $a_{1j} = 0$, 仿之亦可導致矛盾。遂知: $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 之二個分量 a_{1j} 與 a_{2j}, 必同爲 0, 或同不爲 0。據此, 若 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 皆僅有一個分量不爲 0, 顯然 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$。又, 若 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$ 皆至少有二個不爲 0 之分量, 可設 $a_{1j} \ne 0$, $a_{2j} \ne 0$, 並令 $a_{2j} = \lambda a_{1j}$ (當然 $\lambda \ne 0$)。如是, 則對其餘非 0 之分量 a_{1k} 與 $a_{2k}(k \ne j)$ 而言, 因 $a_{1j}a_{2k} = a_{1k}a_{2j} = a_{1k}(\lambda a_{1j})$, 故必 $a_{2k} = \lambda a_{1k}$。遂知 $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$, 而得 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$。

證二: 亦分三部分推導之。

(1) 設$A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j}$, $C = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2$, 當然 $A > 0$ $(C > 0)$。考慮二次函數 $Q(x) = Ax^2 - 2Bx + C = A(x - \frac{B}{A})^2 + \frac{AC-B^2}{A}$, 其中 $x \in R$ (R 爲所有實數所構成之集合)。因 $Q(x) = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}^2x^2 - 2a_{1j}a_{2j}x + a_{2j}^2) = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}x - a_{2j})^2 \ge 0$ $\forall x \in R$, 故 $Q(\frac{B}{A}) \ge 0$, 即 $\frac{AC-B^2}{A} \ge 0$, 遂知 $AC \ge B^2$。

(2) 若 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$, 設 $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$, 即 $a_{2j} = \lambda a_{1j}$ $(1 \le j \le n)$, 則一方面, 由第二種形式之 $Q(x)$ 知 $Q(\lambda) = 0$。另一方面, 由 $a_{2j} = \lambda a_{1j}$ 知 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{1j}^2 = \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2$, 即 $\lambda = \frac{B}{A}$; 以之代入第一種形式之 $Q(x)$, 即得 $Q(\lambda) = Q(\frac{B}{A}) = \frac{AC-B^2}{A}$, 故 $B^2 = AC$。

(3) 若 $B^2 = AC(\ne 0)$, 則由第一種形式之 $Q(x)$ 知 $Q(\frac{B}{A}) = 0$; 以 $x = \frac{B}{A}$ 代入第二種形式之 $Q(x)$, 即得 $a_{2j} = \frac{B}{A}a_{1j}$ (其中 $\frac{B}{A} \ne 0$), 故 $\vec{v}_1 \| \vec{v}_2$。

備註: (一) 若 $\vec{v}_1$ 或 $\vec{v}_2$ 爲零向量, 或 $n = 1$, 則顯然有 $(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2)(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2) =$

$(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{2j})^2$, 故本定理將此等平凡情形均排除在外, 而不論列。

(二) 本定理所述之不等式, 稱爲 Cauchy 不等式。爲引用方便計, 特將此不等式與其兩邊相等之充要條件配套, 而合稱爲 Cauchy 不等式定理。

(三) 證一對於下節中廣義 Cauchy 不等式定理之推導極具啓發性。

下述之問題1.1與2.1, 一淺一深, 均可應用 Cauchy 不等式定理以解之。

問題1.1: 若 $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 1997)$, 而 r 爲異於 0 之實數, 且 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997$, 試求 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\}$。

解答: 據 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2,$$

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r}) \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^2,$$

且其中第一 (任一) 不等式兩邊相等之 (必要) 條件 (均) 爲 $a_1 = a_2 \cdots = a_{1997}$ (注意 $r \neq 0$)。由是, 可知

$$[(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1)][(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})]^2$$
$$\geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2[(\sum_{i=1}^{1997} 1)^2]^2,$$

即 $$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})^2 \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^3,$$

且此不等式兩邊相等之 (必要) 條件爲 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$。又因 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997$, 遂知甫得不等式兩邊相等, 故必 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997} = 1$, 而得 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\} = \{1997\}$。亦可推求如後: 據 Cauchy 不等式,

知 $$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2,$$

且 $$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r}) \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^2,$$

故 $$[(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1)][(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})]^2$$
$$\geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2[(\sum_{i=1}^{1997} 1)^2]^2,$$

即 $$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})^2 \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^3。$$

因 $$\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r} = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997,$$

故甫得不等式兩邊相等。由是, 遂知第一個 (最初二個) 不等式兩邊相等, 故必 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$ (注意 $r \neq 0$)。再據 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = 1997$, 更知 $a_i = 1 (1 \leq i \leq 1997)$, 故得 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\} = \{1997\}$。

備註: (一) 若將本題中之條件

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997$」

改爲

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-5r} = 1997$」,

則可仿上推導如次: 據 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-5r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r}) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})^2,$$

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2,$$

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r}) \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^2,$$

且其中第一 (任一) 不等式兩邊相等之 (必要) 條件 (均) 爲 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$ (注意 $r \neq 0$)。由是, 可知

$$\begin{aligned}&[(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-5r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})][(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})(\sum_{i=1}^{1997} 1)]^2\\&\cdot[(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})]^4\\ \geq\,&(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r})^2[(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-r})^2]^2[(\sum_{i=1}^{1997} 1)^2]^4,\end{aligned}$$

即 $(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-5r})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})^5 \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^6$, 且此不等式兩邊相等之 (必要) 條件爲$a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$。又因$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-5r} = 1997$, 故甫得不等式兩邊相等, 遂知 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997} = 1$, 而 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\} = \{1997\}$。若將本題中之條件

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997$」

改爲

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-mr} = 1997$」

(其中 m 爲已予之正整數), 則理論上, 不論 m 之值爲何, 俱可仿上推導之 [其中, 使用 Cauchy 不等式之原則爲: 用

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-lr})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r}) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-\frac{(l-1)r}{2}})^2,$$

若 l 爲正奇數; 用 $(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-lr})(\sum_{i=1}^{1997} 1) \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-\frac{lr}{2}})^2$, 若 l 爲正偶數。], 但實際上, 恐有諸多情況 (如 $m = 10^{2000}$ 或 111111^{111111} 時) 不便如是求解。若將本題中之條件

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-2r} = 1997$」

改爲

「$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-mr} = 1977$,
其中 m 爲固定之正整數」,

而不特別指明 m 之值, 則更難以此法作一般推導而得 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\}$矣。免驚!下節將引介簡易之解法。[參見問題1.2之備註]

(二) 對於1996年第8屆亞太數學奧林匹亞競賽試題「設 a, b, c 爲一個三角形的三邊長, 試證明 $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$。並問等號何時成立?」不妨模仿本問題之解法而論證如下: 若 x_1 與 x_2 均爲正數, 則據 Cauchy 不等式定理, 知 $(x_1 + x_2)(1 + 1) \geq (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$, 即 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq \sqrt{2(x_1 + x_2)}$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $x_1 = x_2$。(由$[\sqrt{2(x_1 + x_2)}]^2 - [\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}]^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = [\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}]^2$ 亦可推得此結果。) 由是, 易知: 若 x_1, x_2 與 x_3 均爲正數, 則

$$\begin{aligned}&\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\\ =\,&\frac{1}{2}[(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})\\&+(\sqrt{x_3} + \sqrt{x_1})]\\ \leq\,&\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}} + \sqrt{\frac{x_2 + x_3}{2}} + \sqrt{\frac{x_3 + x_1}{2}},\end{aligned}$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $x_1 = x_2 = x_3$。置 $x_1 = a + b - c$, $x_2 = b + c - a$, $x_3 = c + a - b$, 即得 $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, 且知此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a = b = c$。當然, 亦可推導如次: 注意函數 $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ 之圖形上凸之特性, 當 x_1 與 x_2 均爲正數時, 比較

$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 與 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 之大小 [亦即比較 (線段之) 長短或 (點之) 高低], 易知 $\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\leq\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $x_1=x_2$。下接上示論證之中段與後段, 茲不復述。[參見下節問題1.2之解答 (2)]

問題2.1: 若 $a_1,a_2,\ldots,a_{1997}$ 均爲定數, 且 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{1997}>0$, 試求函數 $f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{1997})=\sum_{i=1}^{1997}\frac{a_i^2}{\sin^2\theta_i}$ 在條件 $\sum_{i=1}^{1997}\cos^2\theta_i=1$ 限制下之最小值, 並求產生該值之點所需滿足之條件 (即確定 f 於何處產生最小值)。

解答: 若 $1995a_1\leq a_2+\cdots+a_{1997}$, 則 $1995a_2\leq 1995a_1\leq a_2+\cdots+a_{1997}$, 故 $1994a_2\leq a_3+\cdots+a_{1997}$; 仿此, 可依次推得 $1993a_3\leq a_4+\cdots+a_{1997}$, $1992a_4\leq a_5+\cdots+a_{1997},\ldots,2a_{1994}\leq a_{1995}+a_{1996}+a_{1997}$ 與 $a_{1995}\leq a_{1996}+a_{1997}$。據上, 顯然可知: 若 $(1996-i)a_i\leq a_{i+1}+\cdots+a_{1997}$, 而 i 爲固定整數, 且 $1\leq i<1995$, 則必 $(1996-j)a_j\leq a_{j+1}+\cdots+a_{1997}$ (其中 $i\leq j\leq 1995$)。由其對偶命題, 又知: 若 $(1996-i)a_i>a_{i+1}+\cdots+a_{1997}$, 而 i 爲固定整數, 且 $1<i\leq 1995$, 則必 $(1996-j)a_j>a_{j+1}+\cdots+a_{1997}$ (其中 $1\leq j\leq i$)。因此, 可考慮下列 1996 種可能情形以解題: (1)$1995a_1\leq a_2+\cdots+a_{1997}$; (2)$1995a_1>a_2+\cdots+a_{1997}$, $1994a_2\leq a_3+\cdots+a_{1997}$;(3)$1994a_2>a_3+\cdots+a_{1997}$, $1993a_3\leq a_4+\cdots+a_{1997};\ldots;(1995)2a_{1994}>a_{1995}+a_{1996}+a_{1997}$; $a_{1995}\leq a_{1996}+a_{1997}$; (1996)$a_{1995}>a_{1996}+a_{1997}$。注意以上 1996 種情形已窮盡所有可能, 且其中任二種情形均互斥。

以下, 爲方便計, 以 $(*)$ 表條件 $\sum_{i=1}^{1997}\cos^2\theta_i=1$ (相當於 $\sum_{i=1}^{1997}\sin^2\theta_i=1996$)。

$\langle\alpha\rangle$ 若 $1995a_1\leq\sum_{j=2}^{1997}a_j$ [此即上列之 (1)], 即 $1996a_1\leq\sum_{j=1}^{1997}a_j$, 則 $0<\frac{1996a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}}\leq 1$, 故 $0<\frac{1996a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}}\leq 1$ $(1\leq i\leq 1997)$。據 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^{1997}\frac{a_i^2}{\sin^2\theta_i})(\sum_{i=1}^{1997}\sin^2\theta_i)\geq(\sum_{i=1}^{1997}a_i)^2,$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲

$$\frac{a_1}{\sin^2\theta_1}=\frac{a_2}{\sin^2\theta_2}=\cdots=\frac{a_{1997}}{\sin^2\theta_{1997}},$$

故在 $(*)$ 之下, 函數 f 於且僅於

$$\sin^2\theta_i=\frac{1996a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}}(1\leq i\leq 1997)$$

之處 (有無窮多個點) 產生最小值 $\frac{1}{1996}(\sum_{i=1}^{1997}a_i)^2$。

$\langle\beta\rangle$ 若 $(1996-i)a_i>\sum_{j=i+1}^{1997}a_j$, $(1995-i)a_{i+1}\leq\sum_{j=i+2}^{1997}a_j$, 其中 i 爲 1 至 1995 之任一固定整數 [此即上述之 $(i+1)$。注意 $i=1995$ 時, 前一不等式與 (1996) 相同, 而後一不等式則自動成立!], 令

$$b_k=\frac{1}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j\ (1\leq k\leq i),$$

則有

$$\begin{aligned}&f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{1997})\\=&[\sum_{k=1}^{i}\frac{b_k^2}{\sin^2\theta_k}+\sum_{j=i+1}^{1997}\frac{a_j^2}{\sin^2\theta_j}]+\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k^2-b_k^2}{\sin^2\theta_k}。\end{aligned}$$

(i) 由 $(1996-i)b_i=\sum_{j=i+1}^{1997}a_j\geq(1996-i)a_{i+1}$, 知 $b_1\geq a_{i+1}$, 故 $b_1=\cdots=b_i\geq a_{i+1}\geq\cdots\geq a_{1997}>0$; 又由 $(1996-i)b_1=\sum_{j=i+1}^{1997}a_j$ 與 $ib_1=\sum_{k=1}^{i}b_k$, 可得 $1996b_1=\sum_{k=1}^{i}b_k+\sum_{j=i+1}^{1997}a_j$。據 $\langle\alpha\rangle$, 知在 $(*)$ 之下, 函數

$$\sum_{k=1}^{i}\frac{b_k^2}{\sin^2\theta_k}+\sum_{j=i+1}^{1997}\frac{a_j^2}{\sin^2\theta_j}$$

於且僅於

$$\sin^2\theta_k=1\ (1\leq k\leq i),$$
$$\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}(i+1\leq j\leq 1997,$$

其中

$$s=\sum_{k=1}^{i}b_k+\sum_{j=i+1}^{1997}a_j=\frac{1996}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)$$

之處產生最小值 $\frac{s^2}{1996}$; 又以 $\sin^2\theta_k=1$, $\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}$ 直接代入上述函數, 易知此最小值實即

$$\sum_{k=1}^{i}b_k^2+\frac{1}{1996-i}(\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)^2。$$

(ii) 由

$$a_k\geq a_i>\frac{1}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j=b_k>0$$

可得 $a_k^2-b_k^2>0$, 其中 $1\leq k\leq i$。顯然, 在 $(*)$ 之下, 函數 $\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k^2-b_k^2}{\sin^2\theta_k}$ 於且僅於

$$\sin^2\theta_k=1\ (1\leq k\leq i),$$
$$\sum_{j=i+1}^{1997}\sin^2\theta_j=1996-i$$

之處產生最小值 $\sum_{k=1}^{i}(a_k^2-b_k^2)$。

合 (i) 與 (ii), 遂知在 $(*)$ 之下, 函數 f 於 $\sin^2\theta_k=1(1\leq k\leq i)$, $\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}(i+1\leq j\leq 1997$, 而 $s=\frac{1996}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)$ 之處 (有無窮多個點) 產生最小值

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{i}(a_k^2-b_k^2)+\sum_{k=1}^{i}b_k^2\\&+\frac{1}{1996-i}(\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)^2\\=&\sum_{k=1}^{i}a_k^2+\frac{1}{1996-i}(\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)^2。\end{aligned}$$

備註: 以上推導, 因解說綦詳, 故表面文字冗長。實際上, 其內容至簡。茲再綴數語, 略述解題大要如次: (1°) 考慮下列 1995 個不等式: $1995a_1\leq a_2+\cdots+a_{1997}$, $1994a_2\leq a_3+\cdots+a_{1997},\ldots,a_{1995}\leq a_{1996}+a_{1997}$。本解答首段前半指出: 若上列某式爲眞, 則其後諸式 (若有) 亦爲眞; 若上列某式爲僞, 則其前諸式 (若有) 亦爲僞。而其後半所列之 (1), 即上列 1995 個不等式俱爲眞之情形; 其最後所列之 (1996), 即上列 1995 個不等式俱爲僞之情形; 其餘之 (i), 即上列 1995 個不等式自第 i 個起 (俱) 爲眞, 且其前諸不等式 (俱) 爲僞之情形。(2°)對於情形 (1), 利用 Cauchy 不等式定理, 易知 f 在 $(*)$ 之下於且僅於

$$\sin^2\theta_i=\frac{1996a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}}(1\leq i\leq 1997)$$

之處產生最小值 $\frac{1}{1996}(\sum_{i=1}^{1997}a_i)^2$, 此即 $\langle\alpha\rangle$。對於其他情形 $(i+1)$, 其中 $1\leq i\leq 1995$, 可如 $\langle\beta\rangle$ 之前段所示引入 $b_k(1\leq k\leq i)$,

而將 $f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{1997})$ 改寫為

$$\sum_{k=1}^{i}\frac{b_k^2}{\sin^2\theta_k}+\sum_{j=i+1}^{1997}\frac{a_j^2}{\sin^2\theta_j} \text{ 與 } \sum_{k=1}^{i}\frac{a_k^2-b_k^2}{\sin^2\theta_k}$$

二部分之和。其前一個部分和分子中之 $b_k(1\le k\le i)$ 與 $a_j(i+1\le j\le 1997)$ 構成正項遞減數列, 且 $1996b_1$等於此數列之和, 故逕用 $\langle\alpha\rangle$ 易知其在 $(*)$ 之下於何處產生最小值, 並求得此值, 是為 $\langle\beta\rangle$ (i)。而 $\langle\beta\rangle$ (ii) 所示關於後一個部分和之推論, 則十分淺顯。合 (i) 與 (ii), 即得情形 $(i+1)$ 之解矣。(3°) 就 $n=2,3$ 與 4, 實際試求函數

$$f(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\sin^2\theta_i}$$

在條件 $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i=1$ 限制下之最小值, 並求產生該值之點所需滿足之條件 (即確定 f 於何處產生最小值), 可歸納出 $n=1997$ 時之推導, 如上解答所示。

貳. 廣義Cauchy不等式定理

前節之 Cauchy 不等式定理, 可適當類推之。茲述並證如下:

廣義Cauchy不等式定理: 設 m,n 均為整數, 且 $m\ge 2$, $n\ge 2$。若 $a_{ij}\ge 0$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$, 且 $\vec{v}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ 均非零向量, 則

$$\prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^m)\ge[\sum_{j=1}^{n}(\prod_{i=1}^{m}a_{ij})]^m,$$

且此不等式兩邊相等之充要條件為 $\vec{v}_1\|\cdots\|\vec{v}_m$。

證明: 設 $S=\Pi_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)$,$T=[\sum_{j=1}^n(\Pi_{i=1}^m a_{ij})]^m$, 並令 m (橫列)$\times n$(縱行) 矩陣 $A=(a_{ij}^m)$, 其位於第 i 列第 j 行之元素為 a_{ij}^m。茲分三部分推導如次:

(1) 以下, 為討論方便, 暫視 a_{ij} 為文字 (或變數)。顯然, S 與 T 均可展開為 n^m 項之和: 通常將前者書為 $S=\sum(a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{mj_m})^m$, 其中各項均為 A 中每列一元素共 m 個元素之乘積; 後者則可併項而記為

$$T=\sum\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{k_1}$$
$$(a_{12}a_{22}\cdots a_{m2})^{k_2}\cdots(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^{k_n},$$

其中所有 k_j 均為非負之整數, 且 $k_1+k_2+\cdots+k_n=m$。

對於 S, 可改計縱行: 若 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 均為固定且非負之整數, 而 $k_1+k_2+\cdots+k_n=m$, 則前述 S 之 n^m 項 (乘積) 中, 由 A 之第 1 行取 k_1 個元素, 第 2 行取 k_2 個元素,$\cdots$, 第 n 行取 k_n 個元素相乘而得者 (註: 由某行取 0 個元素意謂不取該行任何元素), 共有 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項, 設此 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項之和為 $S_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$。若 $k_1>0$, 則此 $S_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$ 之展式中, A 之第 1 行取第 1 至第 k_1 列元素者, 必呈 $(a_{11}a_{21}\cdots a_{k_11})^m\cdots$ 之形, 共有 $\frac{(m-k_1)!}{k_2!\cdots k_n!}$ 項; 同理, 易知: 若 $i_1,\cdots,i_{k_1}$ 為 $1,\cdots,m$ 中任意 k_1 個全異數, 則上述 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項 (乘積) 中, A 之第 1 行取第 i_1列, $\cdots$, 及第 i_{k_1} 列元素者, 必呈 $(a_{i_11}a_{i_21}\cdots a_{i_{k_1}1})^m\cdots$ 之形, 共有 $\frac{(m-k_1)!}{k_2!\cdots k_n!}$ 項。由是, 遂知前述 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項之連乘積

$P_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$ 必呈

$$(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{m(\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\cdot\frac{k_1}{m})}\cdots$$
$$=(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{(\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!})k_1}\cdots$$

之形。對於 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中所有正整數 k_j 俱仿上討論之 (考慮 A 之第 j 行), 可得

$$\begin{aligned}&P_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\\&=[(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{k_1}(a_{12}a_{22}\cdots a_{m2})^{k_2}\\&\cdots(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^{k_n}]^{\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}}\end{aligned}$$

(注意此式於若干 $k_j=0$ 時亦成立)。以下, 回歸題設, 視 a_{ij} 爲非負之實數, 並規定 $0^0=1$。據上, 由算術平均數與幾何平均數不等式定理, 遂知

$$\begin{aligned}&S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\\&\geq\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}[P_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}]^{\frac{k_1!k_2!\cdots k_n!}{m!}}\\&=\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{k_1}\\&\cdot(a_{12}a_{22}\cdots a_{m2})^{k_2}\cdots(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^{k_n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&故\sum S_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\\&\geq\sum\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1})^{k_1}\\&\cdot\ (a_{12}a_{22}\cdots a_{m2})^{k_2}\cdots(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^{k_n},\end{aligned}$$

即 $S\geq T$, 並知 $S=T$ 之充要條件爲 $S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 之展式所有 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項均等。[注意: 特別當 $S=T$ 時, 若 $S_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$ 之展式中某項爲 0, 則其所有 $\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ 項必均爲 0。]

(2) 若 $\vec{v}_1\|\cdots\|\vec{v}_m$, 設 $\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_1(1\leq i\leq m$, 當然 $\lambda_1=1)$, 即 $a_{ij}=\lambda_i a_{1j}(1\leq j\leq n)$, 則

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)=\prod_{i=1}^m[\sum_{j=1}^n(\lambda_i a_{1j})^m]\\&=\prod_{i=1}^m(\lambda_i^m\sum_{j=1}^n a_{1j}^m)=(\prod_{i=1}^m\lambda_i^m)(\sum_{j=1}^n a_{1j}^m)^m,\\&[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m=[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m\lambda_i a_{1j})]^m\\&=[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m\lambda_i)a_{1j}^m]^m=[(\prod_{i=1}^m\lambda_i)\sum_{j=1}^n a_{1j}^m]^m\\&=(\prod_{i=1}^m\lambda_i)^m(\sum_{j=1}^n a_{1j}^m)^m, 故 S=T。\end{aligned}$$

(3) 若 $S=T$, 則由 (1) 之論證知 $S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 之展式所有 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項均等。據此, 可推斷 A 中同行 m 個數, 必均爲 0, 或均不爲 0: 蓋若不然, 假定第 1 行包含 0 與非 0 之數, 爲說明方便計, 可設 $a_{11}\neq 0$, 而 $a_{21}=0$。如是, 則一方面, 因 $\vec{v}_i(2\leq i\leq m)$ 非零向量, 必有 j_i 使 $a_{ij_i}\neq 0$, 故 $(a_{11}\Pi_{i=2}^m a_{ij_i})^m\neq 0$。另一方面, 設 $(a_{11}\Pi_{i=2}^m a_{ij_i})^m$ 爲 $S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 之展式中之一項 (當然 $k_1\geq 1$), 則在 A 中每列各取一數 (元素) 之原則下, 可先於第 1 行取 a_{21}^m 及另外 k_1-1 個數, 而後依 $j=2,\ldots,n$ 之順序, 於第 j 行取 k_j 個數; 若將如是所取之 m 個數相乘, 即得 $S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 之展式中呈 $(a_{21}\cdots)^m$ 形之一項, 其值爲 0。遂與「$S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 之展式所有 $\frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 項均等」相左! 仿此, 若 $a_{i1}\neq 0$, 而 $a_{i'1}=0$, 亦可導致矛盾! 故 A 中第 1 行 m 個數, 必均爲 0, 或均不爲 0。同理, 可知 A 中同行 m 個數, 必均爲 0, 或均不爲 0。據此, 若 A 中僅有某行 m 個數均不爲 0, 其他各行所有數均爲 0,

顯然 $\vec{v}_1\|\cdots\|\vec{v}_m$。又, 若 A 中至少有二行之數均不爲 0, 可設第 j 行所有 $a_{ij}^m\neq 0$, 並令 $a_{ij}=\lambda_1 a_{1j}(2\leq i\leq m)$, 當然 $\lambda_i\neq 0$。於是, 若第 j' 行 $(j'\neq j)$ 所有 $a_{ij'}^m\neq 0$, 可考慮 $S_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ 當 $k_j=1$,$k_{j'}=m-1$ 時之展式; 因其所有 $\frac{m!}{1!(m-1)!}=m$ 項均等, 即

$$[a_{1j}(\frac{\prod_{i'=1}^m a_{i'j'}}{a_{1j'}})]^m=[a_{ij}(\frac{\prod_{i'=1}^m a_{i'j'}}{a_{ij'}})]^m,$$

其中 $2\leq i\leq m$, 故 $\frac{a_{1j}}{a_{1j'}}=\frac{a_{ij}}{a_{ij'}}$, 即 $a_{1j}a_{ij'}=a_{ij}a_{1j'}=\lambda_i a_{1j}a_{1j'}$, 亦即 $a_{ij'}=\lambda_i a_{1j'}$。遂知 $\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_1(2\leq i\leq m)$, 而得 $\vec{v}_1\|\cdots\|\vec{v}_m$。

備註: (一) 若 $\vec{v}_1,\ldots,$ 或 $\vec{v}_m$ 爲零向量, 或 $m=1$, 或 $n=1$, 則顯然有 $\Pi_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)\geq[\sum_{j=1}^n(\Pi_{i=1}^m a_{ij})]^m$, 故本定理將此等平凡情形均排除在外, 而不論列。

(二) 本定理所述之不等式, 稱爲廣義 Cauchy 不等式。爲引用方便計, 特將此不等式與其兩邊相等之充要條件配套, 而合稱爲廣義 Cauchy 不等式定理。

(三) 若 m 爲正偶數, n 爲整數, $n\geq 2$, 而 $a_{ij}(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$ 均爲實數, 且 $\vec{v}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ 均非零向量, 則利用三角形不等式之推廣及本定理所述之廣義 Cauchy 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)&=\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^m)\\ \geq[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m|a_{ij}|)]^m&=[\sum_{j=1}^n|\prod_{i=1}^m a_{ij}|]^m\\ \geq|\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})|^m&=[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m,\end{aligned}$$

故不等式

$$\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)\geq[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m$$

亦成立。又, $\vec{v}_1\|\cdots\|\vec{v}_m$ 顯然爲此不等式兩邊相等之充分條件 [本定理證明 (2) 仍有效]; 但當偶數 $m\geq 4$ 時, 若令 $a_{11}=a_{21}=-1$, 並令其餘所有 $a_{ij}=1$, 易知其非必要條件! [在此情況下, (3) 之論證, 何處失效?]

(四) 若奇數 $m\geq 3$, 整數 $n\geq 2$, 而 $a_{ij}\leq 0(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$, 且 $\vec{v}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ 均非零向量, 令 $b_{ij}=-a_{ij}$, 則

$$\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)=-\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n b_{ij}^m),$$

$$[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m=-[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m b_{ij})]^m,$$

據本定理, 可得反向之不等式

$$\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m)\leq[\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m,$$

並知此不等式兩邊相等之充要條件爲 $\vec{v}_1\|\ldots\|\vec{v}_m$。由是, 又知; 不宜將條件「$a_{ij}\geq 0$」或「$a_{ij}\leq 0$」放寬爲「$a_{ij}$ 均爲實數」! 否則

$$\prod_{i=1}^m(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m) \text{ 與 } [\sum_{j=1}^n(\prod_{i=1}^m a_{ij})]^m$$

二者, 孰大孰小? 將無確定之答案矣。(例如令 $a_{11}=a_{21}=-1$, 並令其餘所有 $a_{ij}=1$, 則前者小於後者; 若令 $a_{11}=-1, a_{21}=2$, 並令其餘所有 $a_{ij}=1$, 則前者大於後者。)

(五) 據 (三) 與 (四) 之討論, 可知: 上述之廣義 Cauchy 不等式定理, 係將原 Cauchy 不等式及其兩邊相等之充要條件二者相提並論, 以作類推, 而得之一般性 (化)

結果。當然, 亦可將其中 $m=2$ 之情形, 特地改用原 Cauchy 不等式定理之形式敍述之 (其中 a_{ij} 爲實數, 不必限定 $a_{ij}\geq 0$); 如是所得之定理, 雖名益副實, 但較爲瑣碎。又, 若不計不等式兩邊相等之必要條件, 則對於 m 爲正偶數之情形, 可將其中條件「$a_{ij}\geq 0$」放寬爲「a_{ij} 均爲實數」; 但若如是修改, 則若干問題 (例如本節問題1.2備註所解之問題及問題2.2) 即未能藉之求解矣。是得失兼有, 利弊並見也。

以下, 提供問題1.2,2.2,3.1,4.1及其解答, 與若干備註, 略示廣義 Cauchy 不等式定理之應用。

問題1.2: 設整數 $n\geq 2$, 而 $\alpha_i>0(1\leq i\leq n)$, $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$, 且 r 爲有理數, $r\neq 0$, $r\neq 1$。若 $a_i>0(1\leq i\leq n)$, 試比較 $\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^r$ 與 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^r$ 之大小, 並求 $\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^r=(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^r$ 之充要條件。

解答: 可分 $r>1$, $0<r<1$ 與 $r<0$ 三種情形推論如次:

(1) 若 $r>1$, 可設 $r=\frac{m}{p}$, 其中 m 與 p 爲互質正整數 (故 $m>p\geq 1$), 並令 $b_i=a_i^{\frac{1}{p}}(1\leq i\leq n)$。據廣義 Cauchy 不等式定理, 知 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i^m)^p(\sum_{i=1}^n\alpha_i)^{m-p}\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i^p)^m$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $b_1=\cdots=b_n$。又因 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$, 故據上知 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i^m)^p\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i^p)^m$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $b_1=\cdots=b_n$; 亦即 $\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^r\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^r$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1=\cdots=a_n$。

(2) 若 $0<r<1$, 可設 $r=\frac{p}{m}$, 其中 m 與 p 爲互質正整數 (故$m>p\geq 1$), 並令 $c_i=a_i^{\frac{1}{m}}(1\leq i\leq n)$。據廣義 Cauchy 不等式定理, 知 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i c_i^m)^p(\sum_{i=1}^n\alpha_i)^{m-p}\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i c_i^p)^m$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $c_1=\cdots=c_n$。又因 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$, 故據上知 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i c_i^m)^p\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i c_i^p)^m$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $c_1=\cdots=c_n$; 亦即 $(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^r\geq\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^r$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1=\cdots=a_n$。

(3) 若 $r<0$, 可設 $r=-\frac{u}{v}$, 其中 u 與 v 爲互質正整數。據廣義 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^{-\frac{u}{v}})^v(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^u\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i)^{u+v},$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1=\cdots=a_n$。又因 $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$, 故據上知

$$(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^{-\frac{u}{v}})^v\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^{-u},$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1=\cdots=a_n$; 亦即

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i^r\geq(\sum_{i=1}^n\alpha_i a_i)^r,$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1=\cdots=a_n$。

備註: 前節問題1.1備註 (一) 最後所述之問題「若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,1997)$, 而 r 爲異於 0 之實數, 且 $\sum_{i=1}^{1997}a_i^r=\sum_{i=1}^{1997}a_i^{-mr}=1997$, 其中 m 爲固定之正

整數, 試求 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\}$。」可解如下: 據廣義 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{-mr})(\sum_{i=1}^{1997} a_i^{r})^m \geq (\sum_{i=1}^{1997} 1)^{m+1},$$

且此不等式兩邊相等之 (必要) 條件爲 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$ (注意 $r \neq 0$)。又因

$$\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-mr} = 1997,$$

遂知上列不等式兩邊相等, 故必 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997} = 1$, 而得 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\} = \{1997\}$。亦可推導如次: 由本問題1.2解答(3) 所得之結果, 知

$$\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997}(a_i^r)^{-m} \geq (\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997} a_i^r)^{-m},$$

且此不等式兩邊相等之(必要) 條件爲 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997}$ (注意 $r \neq 0$)。又因 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^r = \sum_{i=1}^{1997} a_i^{-mr} = 1997$, 遂知上列不等式兩邊相等, 故必 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{1997} = 1$, 而得 $\{\sum_{i=1}^{1997} a_i^{1997}\} = \{1997\}$。事實上, 此題爲下節問題1.4之一特例。

問題2.2: 設 m 與 n 均爲固定正整數, $n \geq 2$, 而 $A_1, \ldots, A_n$ 均爲固定正數, $A_i \geq A_{i+1}(1 \leq i \leq n-1)$, 且函數 $f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^m}{\sin^m \theta_i}$ 之定義域爲 $(0,\pi)^n = \{(\theta_1, \cdots, \theta_n) | 0 < \theta_1 < \pi, \ldots, 0 < \theta_n < \pi\}$, 試求 f 在條件 $\sum_{i=1}^n \cos^2\theta_i = 1$ 限制下之最小值, 並求產生該值之點所需滿足之條件 (即確定 f 於何處產生最小值)。

解答: 因 $0 < \theta_i < \pi$, 故 $\sin\theta_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$。以下, 對於 θ_i 均限定於此範圍內, 以進行討論。

令 $a_i = A_i^{\frac{2m}{m+2}}(1 \leq i \leq n)$, 則 $a_1, \ldots, a_n$ 均爲固定正數,

$$a_i \geq a_{i+1}(1 \leq i \leq n-1),$$
$$f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m \theta_i}。$$

若 $n = 1997$, 則可逐步模仿問題2.1之解法而推導之。茲略述如次 [詳參該題之解答]:

據問題2.1 解答最初之論證, 知可考慮下列 1996 種可能情形以解題:(1) $1995a_1 \leq a_2 + \cdots + a_{1997}$;(2) $1995a_1 > a_2 + \cdots + a_{1997}$, $1994a_2 \leq a_3 + \cdots + a_{1997}$;(3) $1994a_2 > a_3 + \cdots + a_{1997}$, $1993a_3 \leq a_4 + \cdots + a_{1997}$; $\cdots$;(1995)$2a_{1994} > a_{1995} + a_{1996} + a_{1997}$, $a_{1995} \leq a_{1996} + a_{1997}$; (1996)$a_{1995} > a_{1996} + a_{1997}$。

以下, 爲方便計, 以 $(*)$ 表條件 $\sum_{i=1}^{1997}\cos^2\theta_i = 1$ (相當於 $\sum_{i=1}^{1997}\sin^2\theta_i = 1996$)。

$\langle\alpha\rangle$ 若 $1995a_1 \leq \sum_{j=2}^{1997} a_j$[此即上列之 (1)], 則 $0 < \frac{1996a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}} \leq 1$ $(1 \leq i \leq 1997)$。據廣義 Cauchy 不等式定理, 知

$$(\sum_{i=1}^{1997}\frac{a_i^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_i})^2(\sum_{i=1}^{1997}\sin^2\theta_i)^m \geq (\sum_{i=1}^{1997} a_i)^{m+2},$$

且此不等式兩邊相等之充要條件爲

$$\frac{a_1}{\sin^2\theta_1} = \frac{a_2}{\sin^2\theta_2} = \cdots = \frac{a_{1997}}{\sin^2\theta_{1997}},$$

故在 $(*)$ 之下, 函數 f 於且僅於

$$\sin^2\theta_i=\frac{1996a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{1997}}\quad(1\le i\le 1997)$$

之處 (確有滿足此等條件之點) 產生最小值

$$[\frac{1}{1996}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{i=1}^{1997}a_i]^{\frac{m+2}{2}}=[\frac{1}{1996}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{i=1}^{1997}A_i^{\frac{2m}{m+2}}]^{\frac{m+2}{2}}。$$

$\langle\beta\rangle$ 若 $(1996-i)a_i>\sum_{j=i+1}^{1997}a_j$, $(1995-i)a_{i+1}\le\sum_{j=i+2}^{1997}a_j$, 其中 i 爲 1 至 1995 之任一固定整數 [此即上述之 $(i+1)$], 令 $b_k=\frac{1}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j(1\le k\le i)$, 則有

$$\begin{aligned}&f(\theta_1,\cdots,\theta_{1997})\\&=[\sum_{k=1}^{i}\frac{b_k^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_k}+\sum_{j=i+1}^{1997}\frac{a_j^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_j}]\\&\quad+\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k^{\frac{m+2}{2}}-b_k^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_k}。\end{aligned}$$

(i) 不難驗得 $b_1=\cdots=b_i\ge a_{i+1}\ge\cdots\ge a_{1997}>0$, 且 $1996b_1=\sum_{k=1}^{i}b_k+\sum_{j=i+1}^{1997}a_j$。據 $\langle\alpha\rangle$, 知在 $(*)$ 之下, 函數

$$\sum_{k=1}^{i}\frac{b_k^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_k}+\sum_{j=i+1}^{1997}\frac{a_j^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_j}$$

於且僅於

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta_k=1(1\le k\le i),\\&\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}(i+1\le j\le 1997,\end{aligned}$$

其中

$$s=\sum_{k=1}^{i}b_k+\sum_{j=i+1}^{1997}a_j=\frac{1996}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)$$

之處產生最小值 $[\frac{1}{1996}]^{\frac{m}{2}}s^{\frac{m+2}{2}}$; 又以

$$\sin^2\theta_k=1,\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}$$

直接代入上述函數, 易知此最小值實即

$$\sum_{k=1}^{i}b_k^{\frac{m+2}{2}}+[\frac{1}{1996-i}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{j=i+1}^{1997}a_j]^{\frac{m+2}{2}}。$$

(ii) 易知 $1\le k\le i$ 時,$a_k>b_k>0$, 故 $a_k^{\frac{m+2}{2}}-b_k^{\frac{m+2}{2}}>0$。顯然, 在 $(*)$ 之下, 函數

$$\sum_{k=1}^{i}\frac{a_k^{\frac{m+2}{2}}-b_k^{\frac{m+2}{2}}}{\sin^m\theta_k}$$

於且僅於 $\sin^2\theta_k=1(1\le k\le i)$, $\sum_{j=i+1}^{1997}\sin^2\theta_j=1996-i$ 之處產生最小值 $\sum_{k=1}^{i}[a_k^{\frac{m+2}{2}}-b_k^{\frac{m+2}{2}}]$。

合 (i) 與 (ii), 遂知在 $(*)$ 之下, 函數 f於且僅於 $\sin^2\theta_k=1(1\le k\le i)$, $\sin^2\theta_j=\frac{1996a_j}{s}(i+1\le j\le 1997$, 而 $s=\frac{1996}{1996-i}\sum_{j=i+1}^{1997}a_j)$ 之處 (確有滿足此等條件之點) 產生最小值 $\sum_{k=1}^{i}[a_k^{\frac{m+2}{2}}-b_k^{\frac{m+2}{2}}]+\sum_{k=1}^{i}b_k^{\frac{m+2}{2}}+[\frac{1}{1996-i}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{j=i+1}^{1997}a_j]^{\frac{m+2}{2}}=\sum_{k=1}^{i}A_k^m+[\frac{1}{1996-i}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{j=i+1}^{1997}A_j^{\frac{2m}{m+2}}]^{\frac{m+2}{2}}$。

若 $n\ne 1997$, 可仿上推導之。

茲將結論綜述如下: 設 $a_i=A_i^{\frac{2m}{m+2}}$, $\theta_i\in(0,\pi)$, 其中 $1\le i\le n$。

〈 甲 〉若 $(n-2)a_1\le\sum_{j=2}^{n}a_j$, 則在條件 $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i=1$ 限制之下, f於且僅於 $\sin^2\theta_i=\frac{(n-1)a_i}{a_1+\cdots+a_n}(1\le i\le n)$ 之處 (確有滿足此等條件之點) 產生最小值$[\frac{1}{n-1}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{i=1}^{n}A_i^{\frac{2m}{m+2}}]^{\frac{m+2}{2}}$。

〈 乙 〉若 $(n-i-1)a_i>\sum_{j=i+1}^{n}a_j$, 且 $(n-i-2)a_{i+1}\le\sum_{j=i+2}^{n}a_j$, 其中 i 爲 1 至 $n-2$ 之任一固定正整數, 則在條件 $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\theta_i=1$ 限制之下, f

於且僅於 $\sin^2\theta_k = 1 (1 \le k \le i)$, $\sin^2\theta_j = \frac{(n-1)a_j}{s}$ (其中 $i+1 \le j \le n$, 而 $s = \frac{n-1}{n-i-1}\sum_{j=i+1}^n a_j$) 之處 (確有滿足此等條件之點) 產生最小值 $\sum_{k=1}^i A_k^m + [\frac{1}{n-i-1}]^{\frac{m}{2}}[\sum_{j=i+1}^n A_j^{\frac{2m}{m+2}}]^{\frac{m+2}{2}}$。

備註: (一) 當 $n=2$ 時, 情況〈甲〉必定出現, 情況〈乙〉則絕不發生。

(二) 若 $m=2\ell$ (ℓ 爲正整數), 則推導過程中所用之廣義 Cauchy 不等式

$$(\sum_{i=1}^n \frac{A_i^m}{\sin^m\theta_i})^2(\sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i)^m \ge (\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{2m}{m+2}})^{m+2},$$

亦可以與之相當, 且形式較簡 (由 $m+2$ 式相乘降爲 $\ell+1$ 式相乘, 式數減半!) 之不等式

$$(\sum_{i=1}^n \frac{A_i^{2\ell}}{\sin^{2\ell}\theta_i})(\sum_{i=1}^n \sin^2\theta_i)^\ell \ge (\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{2\ell}{\ell+1}})^{\ell+1}$$

替代之。[參見問題 2.1之解答]

(三) 台南一中八十四學年度第一學期第一段考高二自然組數學試題「設 α, β, γ 爲向量 $\vec{a}(\vec{a} \ne \vec{0})$ 之方向角, 則 (1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$ ______。(2) $\frac{9}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}$ 最小之值 = ______。」爲本題於 $m=2$,$n=3$ 時之一簡易特例。

(四) 將問題2.1中函數 f 之定義域限定爲 $(0, \frac{\pi}{2}]^{1997}$, 或將問題2.2中函數 f 之定義域限定爲 $(0, \frac{\pi}{2}]^n$, 顯然均不改變所欲求之最小值 (原解答之推導仍然有效)。但因範圍縮小, 產生最小值之點, 其個數將減少。

(五) 若 $n=2$, 則限制條件 $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 = 1$ 與 $\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 = 1$ 相當, 故 $\sin\theta_1 = 1$ 時 $\sin\theta_2 = 0$, $\sin\theta_2 = 1$ 時 $\sin\theta_1 = 0$, 因此可將函數 $f(\theta_1, \theta_2) = \frac{A_1^m}{\sin^m\theta_1} + \frac{A_2^m}{\sin^m\theta_2}$ 之定義域限定爲 $(0, \frac{\pi}{2})^2$, 而不改變所欲求之最小值。特別當 $m=1$, $n=2$時, 若將函數 $f(\theta_1, \theta_2) = \frac{A_1}{\sin\theta_1} + \frac{A_2}{\sin\theta_2}$ 之定義域限定爲 $(0, \frac{\pi}{2})^2$, 則限制條件 $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 = 1$ 與 $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 相當, 故七十二學年度大學入學考試社會組數學試題「設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 求 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta}$ 之最小值。」可視爲本題之一特例 ($\theta = \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$), 遂得解答如下: 據廣義 Cauchy 不等式定理, 知 $(\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta})^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \ge (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^3$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sin^2\theta} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\cos^2\theta}$; 故函數 $\frac{2}{\sin\theta} + \frac{3}{\cos\theta} (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 於且僅於 $\sin^2\theta = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$, $\cos^2\theta = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}} (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 之處產生最小值 $\sqrt{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^3}$。(此外, 尚有甚多解法; 玆俱不轉述。)

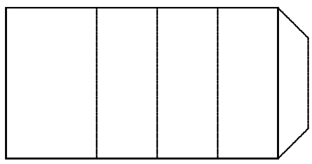
問題3.1: 設 m 與 n 均爲固定之整數, 且 $n \ge 3$。若固定周長 s 之 n 邊形之邊長爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 試論函數 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^m}{s-2a_i}$ 是否有最大值? 是否有最小值? 若有, 並求之。

解答: 因 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲 n 邊形之邊長, 故 $s - 2a_1 = (a_2 + \cdots + a_n) - a_1 > 0$; 同理, $s - 2a_2, \ldots, s - 2a_n$ 均爲正數。

[I]關於最大值之討論:

若正數 L 已予, 則由 $\lim_{x\to 0.5^-}\frac{x^m}{1-2x}=\infty$, 知必有 $\ell\in(0,\frac{1}{2})$, 使 $\frac{\ell^m}{1-2\ell}>\frac{L}{s^{m-1}}$。取 $a_1=\ell s, a_2=\cdots=a_n=\frac{(1-\ell)s}{n-1}$, 則必有以 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 爲邊長之 n 邊形 [參見下示之 $(*)$]。因 $\frac{a_1^m}{s-2a_1}=\frac{\ell^m s^{m-1}}{1-2\ell}>L$, 故函數 f 必無最大值。

$(*)$ 若 $n=4$, 對形如下圖所示之紙板, 沿中間四條縱線內摺之, 確可將最右之梯形黏貼至最左之矩形上, 以作出四角柱形板模, 使其開口構成以 $\ell,\frac{1-\ell}{3},\frac{1-\ell}{3},\frac{1-\ell}{3}$ 爲邊長之四邊形; 若 $n\neq 4$, 仿此處理之, 可得以 $\ell,\frac{1-\ell}{n-1},\ldots,\frac{1-\ell}{n-1}$ 爲邊長之 n 邊形。據相似形原理, 遂知必有以 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 爲邊長之 n 邊形。[其中 $n\geq 3$; $a_1=\ell s, a_2=\cdots=a_n=\frac{(1-\ell)s}{n-1}$。]



[II]關於最小值之討論:

(1) 當 $m=1$ 時, 因

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-2a_i}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{s-(s-2a_i)}{s-2a_i}=\frac{s}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-2a_i}-\frac{n}{2}$$

$$\geq\frac{ns}{2\sqrt[n]{(s-2a_1)(s-2a_2)\cdots(s-2a_n)}}-\frac{n}{2},$$

且

$$(n-2)s=\sum_{i=1}^{n}(s-2a_i)$$

$$\geq n\sqrt[n]{(s-2a_1)(s-2a_2)\cdots(s-2a_n)},$$

故

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\&\geq\frac{n^2\sqrt[n]{(s-2a_1)(s-2a_2)\cdots(s-2a_n)}}{2(n-2)\sqrt[n]{(s-2a_1)(s-2a_2)\cdots(s-2a_n)}}-\frac{n}{2}\\&=\frac{n^2}{2(n-2)}-\frac{n}{2}=\frac{n}{n-2}\\&=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n})$。

(2) 當 $m\geq 2$ 時, 據廣義 Cauchy 不等式, 知

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{s-2a_i})[\sum_{i=1}^{n}(s-2a_i)](\sum_{i=1}^{n}1)^{m-2}$$
$$\geq(\sum_{i=1}^{n}a_i)^m,$$

故

$$\begin{aligned}f(a_1,a_2,\ldots,a_n)&\geq\frac{s^{m-1}}{(n-2)n^{m-2}}\\&=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n})$。

(3) 當$m\leq 0$時, 令$m=-p$, 則$p\geq 0$, 而 $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^p(s-2a_i)}$。據廣義 Cauchy 不等式, 知 $[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^p(s-2a_i)}](\sum_{i=1}^{n}a_i)^p[\sum_{i=1}^{n}(s-2a_i)]\geq(\sum_{i=1}^{n}1)^{p+2}$, 故

$$\begin{aligned}f(a_1,a_2,\ldots,a_n)&\geq\frac{n^{p+2}}{(n-2)s^{p+1}}\\&=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n})$。

合 (1),(2) 與 (3), 知 f 有最小值 $f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n})=\frac{n}{n-2}(\frac{s}{n})^{m-1}$。

備註: 當 $m=1$ 時, 亦可以下述任一法推求 f 之最小值:

(1°) 由

$$\frac{s-2a_1}{s-2a_i}+\frac{s-2a_2}{s-2a_i}+\cdots+\frac{s-2a_n}{s-2a_i}=\frac{(n-2)s}{s-2a_i}=(n-2)+\frac{2(n-2)a_i}{s-2a_i},$$

可得

$$\frac{a_i}{s-2a_i}=\frac{1}{2(n-2)}\sum_{j=1}^{n}\frac{s-2a_j}{s-2a_i}-\frac{1}{2}。$$

據算術平均數與幾何平均數不等式, 遂知

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\&=\frac{1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{s-2a_j}{s-2a_i}-\frac{n}{2}\\&\geq\frac{n^2}{2(n-2)}-\frac{n}{2}=\frac{n}{n-2}\\&=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

故 f 有最小值 $\frac{n}{n-2}$。

(2°) 由

$$\frac{s-2a_1}{s-2a_i}+\frac{s-2a_2}{s-2a_i}+\cdots+\frac{s-2a_n}{s-2a_i}=\frac{(n-2)s}{s-2a_i}=(n-2)+\frac{2(n-2)a_i}{s-2a_i},$$

可得

$$\frac{a_i}{s-2a_i}=\frac{1}{2(n-2)}[\sum_{j\neq i}\frac{s-2a_j}{s-2a_i}-(n-3)]。$$

據算術平均數與幾何平均數不等式, 遂知

$$\begin{aligned}&f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-2a_i}\\&=\frac{1}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{s-2a_j}{s-2a_i}-\frac{n(n-3)}{2(n-2)}\\&\geq\frac{n(n-1)}{2(n-2)}-\frac{n(n-3)}{2(n-2)}=\frac{n}{n-2}\\&=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

故 f 有最小值 $\frac{n}{n-2}$。

(3°) 由 Cauchy 不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-2a_i})[\sum_{i=1}^{n}a_i(s-2a_i)]\geq(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(s-2a_i)=s^2-2\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

與 Cauchy 不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}1)\geq(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2,$$

可得

$$\begin{aligned}f(a_1,a_2,\ldots,a_n)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-2a_i}\\&\geq\frac{s^2}{s^2-2\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\geq\frac{s^2}{s^2-\frac{2}{n}s^2}\\&=\frac{n}{n-2}=f(\frac{s}{n},\frac{s}{n},\ldots,\frac{s}{n}),\end{aligned}$$

故 f 有最小值 $\frac{n}{n-2}$。

問題 4.1: 設 m 爲固定之整數。若 a,b 與 c 均爲正數, 且 $abc=1$, 試論函數 $f(a,b,c)=\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}$ 是否有最大值? 是否有最小值? 若有, 並求之。

解答: [I]關於最大值之討論:

若正數 L 已予, 則必有實數 ℓ, 使 $10^{(2m+1)\ell}>2L$。取 $a=10^{2\ell}$, $b=c=10^{-\ell}$, 則 $\frac{a^m}{b+c}=\frac{10^{(2m+1)\ell}}{2}>L$, 故函數 f 必無最大值。

[II]關於最小值之討論:

(1) 當 $m=0$時, 若正數 ε 已予, 則必有實數 k, 使 $10^k<\frac{2}{5}\varepsilon$。取 $a=10^{2k}$, $b=c=10^{-k}$, 則 $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=$

$\frac{1}{2\cdot 10^{-k}} + \frac{2}{10^{2k}+10^{-k}} < \frac{10^k}{2} + 2\cdot 10^k = (\frac{5}{2})10^k < \varepsilon$, 故 f 無最小值。

(2) 當 $m=1$ 時, 因

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\ &= \frac{(a+b+c)-(b+c)}{b+c}\\ &\quad+\frac{(a+b+c)-(c+a)}{c+a}\\ &\quad+\frac{(a+b+c)-(a+b)}{a+b}\\ &= \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\\ &\quad+\frac{a+b+c}{a+b}-3\\ &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}-3,\end{aligned}$$

且 $2(a+b+c)=(b+c)+(c+a)+(a+b)\geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$, 故

$$f(a,b,c)\geq \frac{9\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}{2\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}}-3$$
$$=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}=f(1,1,1),$$

遂知 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

(3) 當 $m\geq 2$ 時, 據廣義 Cauchy 不等式, 知 $(\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b})[(b+c)+(c+a)+(a+b)](1+1+1)^{m-2}\geq (a+b+c)^m$, 故

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &\geq \frac{(a+b+c)^{m-1}}{2\cdot 3^{m-2}}\\ &\geq \frac{(3\sqrt[3]{abc})^{m-1}}{2\cdot 3^{m-2}}\\ &= \frac{3^{m-1}}{2\cdot 3^{m-2}}=\frac{3}{2}=f(1,1,1),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

(4) 當 $m<0$ 時, 令 $A=\frac{1}{a}$, $B=\frac{1}{b}$, $C=\frac{1}{c}$, 則 A,B 與 C 均爲正數, $ABC=1$, 且 $\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}=\frac{A^{-m-1}}{B+C}+\frac{B^{-m-1}}{C+A}+\frac{C^{-m-1}}{A+B}$。據 (1),(2) 與 (3) 所得結果, 遂知: 當 $m=-1$ 時, f 無最小値; 當 $m\leq -2$ 時, f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

備註: (一) 當 $m=1$ 時, 亦可以下述任一法推求 f 之最小值:

(1°) 因

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}-3\\ &= \frac{1}{2}[(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{b+c})+(\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{c+a})\\ &\quad+(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{a+b})]-3\\ &\geq \frac{9}{2}\sqrt[9]{(\frac{a+b}{b+c})(\frac{b+c}{b+c})(\frac{c+a}{b+c})(\frac{a+b}{c+a})(\frac{b+c}{c+a})(\frac{c+a}{c+a})(\frac{a+b}{a+b})(\frac{b+c}{a+b})(\frac{c+a}{a+b})}-3\\ &= \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}=f(1,1,1),\end{aligned}$$

故 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

(2°) 因

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
&= \frac{1}{2}(\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+a}{b+c}-1)+\frac{1}{2}(\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+b}{c+a}-1)+\frac{1}{2}(\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+c}{a+b}-1)\\
&= \frac{1}{2}(\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+c}{a+b}-3)\\
&\geq \frac{1}{2}[6\sqrt[6]{(\frac{a+b}{b+c})(\frac{c+a}{b+c})(\frac{b+c}{c+a})(\frac{a+b}{c+a})(\frac{c+a}{a+b})(\frac{b+c}{a+b})}-3]\\
&= \frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}=f(1,1,1) \text{ 故, } f \text{ 有最小值 } \frac{3}{2}\text{。}
\end{aligned}$$

(3°) 由 Cauchy 不等式 $(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\geq(a+b+c)^2$, $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$ 與 Cauchy 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(1+1+1)\geq(a+b+c)^2$, 可得

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}\\
&\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2}\\
&= \frac{3}{2}=f(1,1,1),
\end{aligned}$$

故 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

(二) 當 $m=2$ 時, 亦可以下法推求 f 之最小值 (不用 Cauchy 不等式): 因

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\\
&= \frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}\\
&\quad +\frac{c(a+b+c)}{a+b}-(a+b+c)\\
&= (a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\\
&\quad +\frac{c}{a+b}-1),
\end{aligned}$$

而 $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, 且 (2) 已證 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, 故 $f(a,b,c)\geq 3(\frac{3}{2}-1)=\frac{3}{2}=f(1,1,1)$, 遂知 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。

(三) 關於最小值, 當 $m<0$ 時, 亦可如 [II]之 (1) $\sim$ (3) 所示, 而直接完整推導如次: (1°) 當 $m=-1$ 時, 若正數 ε已予, 則必有實數 k, 使 $10^k<\frac{2}{5}\varepsilon$。取 $a=10^{-2k}$, $b=c=10^k$, 則

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\\
&= \frac{1}{2\cdot 10^{-k}}+\frac{2}{10^k(10^{-2k}+10^k)}\\
&< \frac{10^k}{2}+2\cdot 10^k\\
&= (\frac{5}{2})10^k<\varepsilon,
\end{aligned}$$

故 f 無最小值。(2°) 當 $m=-2$ 時, 因

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&=\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}\\&\quad+\frac{1}{c^2(a+b)}\\&=\frac{bc}{ca+ab}+\frac{ca}{ab+bc}+\frac{ab}{bc+ca}\\&=\frac{ab+bc+ca}{ca+ab}+\frac{ab+bc+ca}{ab+bc}\\&\quad+\frac{ab+bc+ca}{bc+ca}-3\\&\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{\sqrt[3]{(ca+ab)(ab+bc)(bc+ca)}}-3,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&2(ab+bc+ca)\\&=(ca+ab)+(ab+bc)+(bc+ca)\\&\geq 3\sqrt[3]{(ca+ab)(ab+bc)(bc+ca)},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&\geq\frac{9}{2}\frac{\sqrt[3]{(ca+ab)(ab+bc)(bc+ca)}}{\sqrt[3]{(ca+ab)(ab+bc)(bc+ca)}}-3\\&=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}=f(1,1,1),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。(3°) 當 $m\leq-3$ 時,

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&=\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\\&=\frac{a^{m+1}}{ca+ab}+\frac{b^{m+1}}{ab+bc}+\frac{c^{m+1}}{bc+ca}\\&=\frac{(bc)^{-m-1}}{ca+ab}+\frac{(ca)^{-m-1}}{ab+bc}\\&\quad+\frac{(ab)^{-m-1}}{bc+ca}\text{。}\end{aligned}$$

據廣義 Cauchy 不等式, 知

$$\begin{aligned}&[\frac{(bc)^{-m-1}}{ca+ab}+\frac{(ca)^{-m-1}}{ab+bc}+\frac{(ab)^{-m-1}}{bc+ca}]\\&\cdot[(ca+ab)+(ab+bc)+(bc+ca)]\\&\cdot(1+1+1)^{-m-3}\\&\geq(bc+ca+ab)^{-m-1},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&\geq\frac{(bc+ca+ab)^{-m-2}}{2\cdot 3^{-m-3}}\\&\geq\frac{[3\sqrt[3]{(abc)^2}]^{-m-2}}{2\cdot 3^{-m-3}}\\&=\frac{3^{-m-2}}{2\cdot 3^{-m-3}}=\frac{3}{2}\\&=f(1,1,1),\end{aligned}$$

遂知 f 有最小值 $\frac{3}{2}$。本質上, [II](4) 所述之解法, 與以上所示者實無差異。([II](4) 先利用代換 $A=\frac{1}{a}(=bc)$, $B=\frac{1}{b}(=ca)$, $C=\frac{1}{c}(=ab)$ 將 $f(a,b,c)$ 表爲 A,B,C 之函數, 而後推導之; 此處所示者, 則保留 bc,ca,ab 而不代換也。) 當然, 於 $m=-2$ 時, 將 $f(a,b,c)$ 表爲

$$\frac{bc}{ca+ab}+\frac{ca}{ab+bc}+\frac{ab}{bc+ca}$$

後, 亦可模仿備註 (一) 所述任一法以推求 f 之最小值。再者, 當 $m\leq-3$ 時, 亦可先將 $f(a,b,c)$ 表爲

$$\frac{a^{m+1}}{ca+ab}+\frac{b^{m+1}}{ab+bc}+\frac{c^{m+1}}{bc+ca},$$

再據廣義 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned}&(\frac{a^{m+1}}{ca+ab}+\frac{b^{m+1}}{ab+bc}+\frac{c^{m+1}}{bc+ca})\\&\cdot[(ca+ab)+(ab+bc)+(bc+ca)]\\&\cdot(1+1+1)^{-m-3}\\&\geq(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^{-m-1}\\&=(bc+ca+ab)^{-m-1}\end{aligned}$$

導出

$$\begin{aligned}f(a,b,c)&\geq\frac{(bc+ca+ab)^{-m-2}}{2\cdot 3^{-m-3}}\\&\geq\cdots=\frac{3}{2}=f(1,1,1),\end{aligned}$$

而得 f 有最小值 $\frac{3}{2}$之結論。

(四)1995年第36屆國際數學奧林匹亞競賽試題「設 a, b, c為正實數, 且滿足 $abc = 1$。試證 $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$。」爲本題之一簡易特例。

參. 練習及研究

據問題1.2之解答所示之結果, 藉連續(或極限) 與偏微分之概念, 極易解決下述之問題1.3。

問題1.3: 設整數 $n \geq 2$, 而 $\alpha_i > 0(1 \leq i \leq n)$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 且 r 爲實數, $r \neq 0$, $r \neq 1$。若 $a_i > 0(1 \leq i \leq n)$, 試比較 $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r$ 與 $(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)^r$ 之大小, 並求 $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r = (\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)^r$ 之充要條件。

備註: 其答案可述如下:(1) 若 $r > 1$ 或 $r < 0$, 則 $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r \geq (\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)^r$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1 = \cdots = a_n$; (2) 若 $0 < r < 1$, 則 $(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)^r \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r$, 且此不等式兩邊相等之充要條件爲 $a_1 = \cdots = a_n$。請讀者自行推證, 以爲練習。

利用問題1.3之答案, 極易解決下述之問題1.4。

問題1.4: 設整數 $n \geq 2$。若 $a_i > 0(1 \leq i \leq n)$, 而 s 與 t 均爲異於 0 之實數, $s \neq t$, 且 $\sum_{i=1}^n a_i^s = \sum_{i=1}^n a_i^t = n$, 試求 $\{\sum_{i=1}^n a_i^u\}$, 其中 u爲固定之實數。

備註: 請讀者自行推導, 以作練習。

茲提出下列之問題3.2, 4.2, 4.3, 5.1及5.2, 以供有志讀者研究。

問題3.2: 設 m 與 n 均爲固定之整數, $n \geq 3$, 且 σ 爲 $1, 2, \ldots, n$ 之一種排列 (即 σ 爲由集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 至 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 之一對一映射)。若固定周長 s 之 n 邊形之邊長爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 試論函數

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^m}{s - 2a_{\sigma(i)}}$$

是否有最大值? 是否有最小值? 若有, 試求其值, 並確定 f 於何處產生該值。

備註: (一) 注意 $\lim_{x\to 0.5^-} \frac{x^m}{1-2x} = \infty$ 與 $\lim_{x\to 0.5^-} \frac{(1-x)^m}{1-2x} = \infty$, 極易解決有關最大值之問題。

(二) 本題困難所在: $m = 1$ 時, 是否有最小值?

問題4.2: 設 m 與 n 均爲固定之整數, 且 $n \geq 2$。若 $a_i > 0(1 \leq i \leq n)$, 且 $\Pi_{i=1}^n a_i = d^n$, 其中 d 爲固定正數, 試論函數

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^m}{(a_1 + \cdots + a_n) - a_i}$$

是否有最大值? 是否有最小值? 若有, 試求其值, 並確定 f 於何處產生該值。

備註: (一) $n = 2$ 之情形極易解決。

(二) 本題困難所在: $4 \leq n \leq 1 - m$ 時, 是否有最小值 ?

問題4.3: 設 m 與 n 均爲固定之整數, $n \geq 2$, 且 σ 爲 $1, 2, \ldots, n$ 之一種排列。若

$a_i > 0(1 \leq i \leq n)$, 且 $\Pi_{i=1}^{n} a_i = d^n$, 其中 d 爲固定正數, 試論函數

$$f(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{(a_1+\cdots+a_n)-a_{\sigma(i)}}$$

是否有最大値? 是否有最小值? 若有, 試求其値, 並確定 f 於何處產生該値。

問題 5.1: 設 m 與 n 均爲固定之整數, 且 $n \geq 3$。若固定周長 s 之 n 邊形之邊長爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 試論函數

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{(s-a_i)(s-2a_i)}$$

是否有最大値? 是否有最小値? 若有, 試求其値, 並確定 f 於何處產生該値。

問題 5.2: 設 m 與 n 均爲固定之整數, $n \geq 3$, 且 σ 與 τ 爲 $1, 2, \ldots, n$ 之二種排列。若固定周長 s 之 n 邊形之邊長爲 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 試論函數

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{[s-a_{\sigma(i)}][s-a_{\tau(i)}]}$$

是否有最大値? 是否有最小値? 若有, 試求其値, 並確定 f 於何處產生該値。

微積分課程中所謂之 Lagrange 乘子法, 係在極値存在之假定下, 求函數於若干條件限制下之極値之一種巧妙解法; 唯此法對極値之存在無任何保證, 須另據他理以推斷確有極値, 是美中不足處。讀者諸君若以 Lagrange 乘子法實際試解問題 1.4, 2.2, 3.1, 3.2, 4.2, 4.3, 5.1 及 5.2, 並與本文所介紹之解法比較之, 當可體認廣義 Cauchy 不等式定理之效用矣。

—本文作者曾任教於台灣大學數學系, 現已退休—