

數學家 Paul Erdős

蔡聰明



Paul Erdős (1913 ~ 1996)

去年九月二十日, Paul Erdős (1913 ~ 1996, Erdős 唸成 “air-dish”) 在波蘭華沙參加一個數學研討會, 突然心臟病發而離開人間。數學界因此失去了一位非常獨特並且具有高尚道德情操的偉大數學家。

如果火星人在 Erdős 活著的期間, 曾經跟地球接觸過, 那麼請 Erdős 代表地球到火星去當大使必是個好主意。外星人應該會欣賞 Erdős 的超地球凡俗的智慧。他使用的是宇宙普遍語言—數論, 既流利又機智。更重要的是, 他不受塵世所羈絆。他沒有結婚, 沒有孩子, 沒有房子, 沒有信用卡, 沒有固定工作,

沒有換鞋的麻煩。事實上, 他什麼都沒有, 只有一只簡便的行李箱, 裝著些許衣物以及一些筆記本, 周遊全世界。他不挑食, 只要有咖啡。他說:「一個數學家就像一部機器, 將咖啡轉變成定理。」他的樸素生活完全是為了數學, 他的整個身體與靈魂都是為數學而活。

數學? 這是令許多人頭痛的一門學問! 大多數受過一些教育的人, 你向他們解說大霹靂 (the Big Bang) 或遺傳學, 他們可以理解, 但是他們對於數學的興趣總是侷限在只能了解銀行存款簿上的錯縱而已。對於數學家來說, 他們所從事的學問是人類心智最純粹的創造, 而許多人都公認, Erdős 是本世紀所出產的數學家中之翹楚。

一般而言, 當 Erdős 抵達他要給演講的一個城市時, 他會打電話給他的數學家朋友, 告知「我的頭腦已經來到」, 聽起來彷彿是從地獄來的聲音。但是對於邀請他的主人, 這個頭腦是一個可以共享的寶藏, 並且他們有共同的責任加以開發。主人只需打理他的吃、住, 負責幫他清洗衣物, 就這麼簡單。

Erdős是一位雲遊世界的猶太人。在他的大半輩子, 故國匈牙利都是在獨裁者的統治之下, 他的家人有許多位被德國的希特勒

殺害。爲了回報照顧他生活的朋友之恩情，他從數論、圖形與邏輯擷取美麗的珍珠。他的問題經常是很容易描述，但是卻不易求解，擁有廣大的創造與驚奇空間。

舉個例子，假設有無窮多個點畫在一張無窮的畫布上，使得任何兩點之間的距離都是整數，問這幅畫看起來是什麼樣子？當他向你說明，這些點只能落在一條直線時，他會眉飛色舞，額頭起皺紋。但是你無法要求他解釋他的美妙證明，除非你對圓錐曲線有興趣。(這個例子出自 Anning 和 Erdős 合寫的一篇文章，發表在 Bull. AMS 51 (1945), 598-600。)

他喜歡說：上帝擁有一本超限的天書 (a transfinite book)，裡面包含所有的數學定理以及它們的最佳可能證明。如果上帝好意的話，他會讓你偷窺一下。例如 Fermat 的「兩平方和」定理，即任何形如 $4n + 1$ 的質數皆可唯一表成兩個自然數的平方和，Erdős 認爲 Gauss 所提出的證明就是從這本天書擷取的。所謂的最佳證明是指最單純且最漂亮的證明，有時候這並不唯一。

Erdős 的雙親都是數學教師。在四歲時，Erdős 發現了負數，有一天他對媽媽說：「如果你從 100 減去 250，那麼你將得到低於 0 的 150。」那時他已會心算三位數與四位數的乘法，但是沒有人教他負數。後來，他總是很高興地回憶說：「這是一種獨立發現。」他又說：「當我十歲時，父親告訴我歐幾里得定理“質數有無窮多個”的證明，從此我就被數學釣上了。」一個正整數如果除了“1”之外不能被比他小的正整數整除，就叫做「質數」。例

如，他的生年 1913 是質數，他的享年 83 也是質數。他在十七歲進入 Budapest 大學，當大多數新鮮人只求功課平安及格時，Erdős 就得到生平第一個重要的數學發現：對於著名的 Chebyshev 定理提出一個初等的論證，證明在任何兩個自然數 $n \geq 2$ 與 $2n$ 之間，至少存在有一個質數。從而，歐幾里得定理是自然的結論。四年後，他大學畢業並且得到數學的博士學位。對於先前數學家所發展出來的質數理論，他利用更簡潔的辦法加以重鑄，被譽爲有如開闢巴拿馬運河的航路，解除了必須繞道南美洲的麻煩。

接著，他得到英國 Manchester 大學所給的四年獎學金。從此以後，Erdős 就採行「雲遊學者」(the wandering scholar) 的生活方式，成爲「宇宙的教授」(professor of the universe)。他周遊世界，經常在一個月之中，訪問了十五所大學與研究機構。他養成在旅途中，在飛機上，隨時隨地都可以做數學的習慣。Gauss 謙稱自己的研究成果，「雖不多，但個個熟透」(Few, but ripe)，這變成 Gauss 的格言；而 Erdős 的格言卻是「另一個屋頂，另一個證明」(Another roof, another proof)。Erdős 從未有一個固定的職位，通常都是在幾家研究機構輪駐，每個地方只待上一段短時間。他全心奉獻給數學，有幾位親近的朋友幫他打理財務，包括報稅。

在 1938~39 之間，他待在普林斯頓的高等研究院，與 Mark Kac 及 Aurel Wintner 共同發展出機率式的數論 (probabilistic number theory)。在 1949 年，他與 Atle

Selberg 合作得到質數定理的一個初等但並不容易的證明。這使得 Selberg 在1950年得到 Fields 獎, Erdős 在1951年得到 Cole 獎。後來, 在1983年他和陳省身共同得到 Wolf 獎, Erdős 將五萬美元的獎金自留750美元, 其餘都捐出去。

漂亮歸漂亮, 可能有人會質疑 Erdős 所發表的約一千五百篇論文 (其中約五百篇是跟他人共同合作) 是否有實用價值? 他並沒有宣稱他的論文具有實用性。他說, 只要證明美妙, 這就夠了。然而, 數學不論是多麼抽象, 總是會有一天在某一個地方變成有用, 這是數學的奧妙所在。例如,「組合學」是 Erdős 所探索的一支數學, 它可以計算用磚鋪滿一個不規則空間所需的塊數。他在圖枝理論 (graph theory) 的研究工作, 也被應用到通訊網路的設計上。

多年前, 有位著名的老數論家曾很不客氣地當著 Gian-Carlo Rota 的面批評 Erdős 的研究工作說:「Erdős 只是在重複使用幾個戲法而已。」這令 Rota 心裡不舒服, Rota 說:「事實上, 每個人都只有那幾招, 連偉大的 Hilbert 亦不例外! 我跟大家一樣敬佩 Erdős 在數學上的貢獻。」

超過60年以上驚人的研究生涯, Erdős 對數學作出許多貢獻, 主要是在數論、機率論、實變與複變分析、幾何學、逼近理論、集合論與組合學, 其中要以數論與組合學是他的天才特別閃亮的領域。

他的非凡左腦, 曾幫助過許多剛出道的年輕數學家。他設立兩個基金, 一個在匈牙利, 一個在以色列, 專門獎勵年輕數學家。對

於他來說, 具有潛力的數學家是個“ ε ”, 這個希臘字母被數學家用來表示一個很小的量。對於一個“ ε ”, 他扮演著“Uncle Paul”的關懷角色。他拋出問題, 如果他們能夠解出來, 他就給他們幾百美元作為獎勵, 藉此也把他從演講與獲獎所得到的收入, 像散財童子般地分送出去。一個同事形容他像一隻勤勞的蜜蜂: 嗡嗡地飛到世界各地去傳播數學花粉。

他所提出的未解決問題都附有標價, 從10美元到最高的一萬美元, 完全根據問題的難度而定。當然, 追尋 Erdős 未解決問題的答案, 其誘因是榮譽大過金錢。每個人都以能擁有 Erdős 簽名的支票為榮。舉一個例子: 考慮一個無窮數列, 各項都是自然數, 假設其倒數和之無窮級數是發散的, 問此無窮數列是否含有任意長度的算術數列 (即等差數列)? 這一題的標價是三千美元。

Erdős與匈牙利神童 Louis Pósa 的相遇相知最為人津津樂道。在1959年的夏天, 當時 Pósa 未滿12歲, Erdős 從美國回匈牙利, 人家告訴他說, 有一位小男生名叫 Pósa 知道相當多的高中數學 (Pósa 的母親是一位數學家)。於是 Erdős 非常好奇, 第二天就跟 Pósa 共進午餐。當 Pósa 在喝湯時, Erdős 就提出下面的問題: 給你 $n + 1$ 個自然數, 皆小於或等於 $2n$, 試證必存在有兩個數是互質的。這是 Erdős 在多年前發現的結果, 他費去十來分鐘才找到真正簡單的證明。Pósa坐在那裡一面喝湯一面想, 經過半分鐘, 他開口說:「如果你有 $n + 1$ 個自然數小於或等於 $2n$, 那麼必有兩個數是接續的, 因

此他們互質。」這讓 Erdős 留下深刻的印象，他將這件事比美於 Gauss 7歲時就會巧算出 $1 + 2 + \dots + 100$ 之和。從此，Erdős 與 Pósa 結下不解之緣，Erdős 常寫信拋問題給 Pósa，兩人有系統地共同工作。

由於 Erdős 跟許多數學家合寫過論文，於是 Casper Goffman 幽默地提出：每個數學家都有一個 Erdős 數 (Erdős number) 的概念。設 A, B 為兩個數學家，令 $A_i, i = 0, 1, \dots, n$ ，為 $n+1$ 個數學家，使得 $A_0 = A, A_n = B$ 並且 A_k 與 A_{k+1} 至少合寫過一篇論文， $k = 0, 1, \dots, n-1$ ，記成

$$A_0 = A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \dots \rightarrow A_n = B$$

這是連結 A 與 B 的一條鏈，我們稱此鏈的長度為 n 。在連結 A 與 B 的所有鏈中，最短的長度叫做 B 的 A 數，記為 $\nu(A; B)$ 。若 A 與 B 之間不存在鏈，則定義 $\nu(A; B) = +\infty$ 。顯然 $\nu(A; A) = 0, \nu(A; B) = \nu(B; A)$ 並且有三角不等式

$$\nu(A; C) \leq \nu(A; B) + \nu(B; C)$$

特別地，取 $A = \text{Erdős}$ ，則我們就得到 Erdős 數的函數

$$\begin{aligned} \nu(\text{Erdős}; \cdot) : \text{所有數學家} \\ \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \end{aligned}$$

例如，Goffman 算得 $\nu(\text{Erdős}; \text{Goffman}) = 7$ ，後來又發現 7 可降為 3。愛因斯坦的

Erdős 數為 2。在數學界流傳有這樣一句話：「如果你不知道 Erdős 的話，你就不是一位真正的數學家。」

有人稱讚 Erdős 為「數學家的莫札特」或「西方的 Ramanujan」，也有人拿他跟 L. Euler(1707~1783) 相比。Euler 是有史以來最令人驚異且最多產的瑞士數學家。我們很難描述 Erdős 對數學的熱情，我們只能說，他在數學中一天工作 19 小時，一星期工作七天。要找本世紀專注於抽象思維而又視「富貴如浮雲」的人，我們會發現奧地利哲學家 Ludwig Wittgenstein(1889~1951) 與法國數學家 Alexandre Grothendieck(1928~) 兩個人。前者為了哲學剝光他的生命，捨棄他的財產，全力以赴；後者拒絕接受瑞典科學院頒給他的大獎，理由是「一個人的超額享受必以其他人的需要為犧牲，這難道不是很明顯嗎？」Erdős 散盡他賺來的錢，只不過是因為他不需要它們。他會說「私有財產是擾人的」。當 Wittgenstein 被內在狂亂驅迫到接近到自殺邊緣時，Erdős 只是單純地建構他的人生，從他偉大而莊嚴的思想中，摘取大量的幸福。

—本文作者任教於台灣大學數學系—