# Cantor-Hilbert 對角線方法

胡紹宗

衆所周知, 在 $n$ 維歐氏空間 $R^n$ 中成立著著名的“聚點原則” ( $R^n$ 中任何有界序列一定能選出收斂的子序列), 它是微積分學賴以建立的基礎, 可是在無限維空間中,“聚點原則”不一定成立。

例: 在閉區間 [0,1]上作連續函數列:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & x \geq \frac{1}{n} \\ 1-nx, & x \leq \frac{1}{n} \end{cases} \quad n=1,2,\cdots$$

因爲 $\left|\left|f_n\right|\right| = \max_{0\leq x\leq 1}\left|f_n(x)\right| = 1$, 所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是無限維空間 C[0,1] 中有界序列, 但不可能有子序列在 C[0,1] 中收斂。事實上, 如果有 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 C[0,1] 中依範數收斂於 $f$, 即

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left|\left|f_{n_k}-f\right|\right| = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{k\to\infty}\max_{0\leq x\leq 1}\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|=0 \\
\Rightarrow &\lim_{k\to\infty}\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|=0 \\
\Rightarrow &f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

顯然 $f(x)$ 在點 $x=0$ 不連續。

另一方面, 序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 C[0,1]中按範數收斂於 $f$ 等價於函數列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 [0,1]上一致收斂於 $f(x)$, 由數學分析知識, $f(x)$ 在 [0,1] 上連續, 於是矛盾。

所以“聚點原則”在無限維空間 C[0,1] 中不成立。

其實,“聚點原則” 是有限維空間的特徵。無限維空間中“聚點原則” 不再成立這一事實很早便爲 Hilbert 認識, 他在研究具對稱核的積分方程時, 針對著這個問題提出了序列弱收斂的概念, 並創立了重要的 Contor-Hilbert 對角線方法。先通過線性賦範空間中的“聚點原則”, 介紹這一方法, 再進一步指出它的應用。

定義1: 設 $E$ 爲線性賦範空間,$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是共軛空間 $E^* = B(E,K)$ 中的序列。如果有 $f_0 \in E^*$, 使對任何 $x \in E$, 有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$, 則稱線性有界泛函序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$弱*收斂於 $f_0$, 記作 $f_n \xrightarrow{弱^*} f_0$。

引理: 如果空間 $E^*$ 中線性有界泛函序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足下面的條件:

(i) $\{\|f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界數列;

(ii) 對於 $E$ 中某一稠密子集 $G$ 的每個元素 $x$, 有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)(f_0 \in E^*)$。

則 $\quad f_n \xrightarrow{弱^*} f_0$

證: 命 $M=\sup_n\{\|f_n\|\}$, 由於 $G$ 在 $E$ 中稠密, 故任給 $\varepsilon>0$, 對任一 $x\in E$, 有 $x_0\in G$, 使

$$\|x-x_0\|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

於是

$$\begin{aligned}
|f_n(x)-f_0(x)| &\leq |f_n(x)-f_n(x_0)| \\
&+|f_n(x_0)-f_0(x_0)|+|f_0(x_0)-f_0(x)| \\
&=|f_n(x-x_0)|+|f_n(x_0)-f_0(x)| \\
&\quad +|f_0(x-x_0)| \\
&\leq \|f_n\|\,\|x-x_0\|+|f_n(x_0)-f_0(x_0)| \\
&\quad +\|f_0\|\,\|x-x_0\| \\
&\leq M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+|f_n(x_0)-f_0(x_0)| \\
&\quad +\|f_0\|\cdot\frac{\varepsilon}{4M}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_0(x)|\leq \frac{\varepsilon}{4}+|f_n(x_0)-f_0(x_0)| \\ +\|f_0\|\cdot\frac{\varepsilon}{4M} \qquad (1)\end{aligned}$$

另一方面, 由 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$ $(x\in G)$, 得

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|=|f_0(x)|$$

而 $|f_n(x)|\leq\|f_n\|\,\|x\|$, 故 $|f_0(x)|\leq\|f_n\|\,\|x\|$, 從而 $\|f_0\|\leq\|f_n\|$, 於是

$$\|f_0\|\leq M \qquad (2)$$

又由於 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f_0(x_0)$, 故存在自然數 $N$, 使當 $n>N$ 時,

$$|f_n(x_0)-f_0(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

因此, 當 $n>N$ 時, 由 (1)(2)(3) 得, $|f_n(x)-f_0(x)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$, 即對任一 $x\in E$, 有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$, 所以 $f_n\xrightarrow{弱^*} f_0$。證畢。

定理1: 如果線性賦範空間 $E$ 是可分的, 則其共軛空間 $E^*$ 中任何一致有界的序列都有弱$^*$收斂的子序列。

證: 設 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $E^*$ 中一致有界的序列, 即 $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$ 有界, 則存在 $M>0$, 使得

$$\|f_n\|\leq M,\quad n=1,2,\cdots$$

由 $E$ 可分可知, $E$ 中必存在可數稠密子集, 設其爲 $\{x_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$。於是得 $|f_n(x_1)|\leq\|f_n\|\,\|x_1\|\leq M\|x_1\|$, 即數列 $f_1(x_1)$,$f_2(x_1)$,$f_3(x_1)$,$\cdots$ 有界, 由“聚點原則”, 必可從 $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ 中選出收斂的子數列:

$$f_1^{(1)}(x_1),f_2^{(1)}(x_1),f_3^{(1)}(x_1),\cdots$$

取 $\{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^\infty$, 有 $|f_n^{(1)}(x_2)|\leq\|f_n^{(1)}\|\cdot\|x_2\|$, 即數列 $f_1^{(1)}(x_2),f_2^{(1)}(x_2),f_3^{(1)}(x_2),\cdots$ 有界, 同理, 必可從 $\{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n=1}^\infty$ 中選出收斂的子數列

$$f_1^{(2)}(x_2),f_2^{(2)}(x_2),f_3^{(2)}(x_2),\cdots$$

如此繼續下去, 得到如下可數個泛函序列:

$$\left.\begin{array}{l}
f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_3^{(1)},\cdots,f_n^{(1)},\cdots \\
f_1^{(2)},f_2^{(2)},f_3^{(3)},\cdots,f_n^{(2)},\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_1^{(n)},f_2^{(n)},f_3^{(n)},\cdots,f_n^{(n)},\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

其中每一個序列是前一序列的子序列, 而且對每個 $k(k=1,2,\cdots)$, 數列

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), f_3^{(k)}(x_k), \cdots \text{收斂。}$$

在 (4) 中取對角線上的泛函組成的序列:

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, f_3^{(3)}, \cdots, f_n^{(n)}, \cdots$$

它顯然是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列, 容易看出對每個 $k(k=1,2,\cdots)$, 數列

$$f_1^{(1)}(x_k), f_2^{(2)}(x_k), f_3^{(3)}(x_k), \cdots, f_n^{(n)}(x_k), \cdots$$

收斂, 即 $\{f_n^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $E$ 的稠密子集 $\{x_k\}$ 上收斂。又因 $\|f_n^{(n)}\| \leq M$, 即 $\{\|f_n^{(n)}\|\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 故由引理, $\{f_n^{(n)}\}$ 在 $E$ 上弱*收斂於某一線性有界泛函。證畢。

在定理1的證明中用到了"抽子數列方法"或稱"Cantor-Hilbert 對角線方法", 鑒於此法的重要性, 特在這裡詳細敍述它。

將可數個無窮數列排列如下:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

並假定 $|a_{k_i}| \leq c(k,i=1,2,\cdots)$, $C$ 爲固定正數。

據"聚點原則", 從第一行中抽出收斂的子數列:

$$a_{1n_1^1}, a_{1n_2^1}, \cdots, a_{1n_i^1}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L_1$$

考慮第二行中的子數列 $\{a_{2n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 仍可從中抽出收斂的子數列:

$$a_{2n_1^2}, a_{2n_2^2}, \cdots, a_{2n_i^2}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L_2$$

注意 $\{n_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\{n_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ 的子數列, 由此繼續下去, 可得:

$$a_{kn_1^k}, a_{kn_2^k}, \cdots, a_{kn_i^k}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L^k$$

這裡 $\{n_i^k\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\{n_i^{k-1}\}_{i=1}^{\infty}$ 的子數列, 如此進行下去, 有

$$\begin{array}{l} a_{1n_1^1}, a_{1n_2^1}, \cdots, a_{1n_i^1}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L_1 \\ a_{2n_1^2}, a_{2n_2^2}, \cdots, a_{2n_i^2}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{kn_1^k}, a_{kn_2^k}, \cdots, a_{kn_i^k}, \cdots \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} L_k \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

於是對角線上的元素, 其下指標爲 $kn_k^k(k=1,2,\cdots)$, 而

$$\begin{array}{l} \{n_k^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k^1\}_{k=1}^{\infty} \\ \{n_k^k\}_{k=2}^{\infty} \subset \{n_k^2\}_{k=1}^{\infty} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \{n_k^k\}_{k=i}^{\infty} \subset \{n_k^i\}_{k=1}^{\infty} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

又 $\lim_{k\to\infty} a_{in_k^i} = L_i$, 故 $\lim_{k\to\infty} a_{in_k^k} = L_i$ $(i=1,2,\cdots)$。再應用此法, 證明 Hilbert 在弱收斂意義下建立了的無限維空間 $H$ 中的"聚點原則"。

定義 2: 設 $H$ 爲 Hilbert 空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H$ 中的序列, 如果有 $x_0 \in H$, 使對任何 $y \in H$, $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) =$

$(x_0, y)$, 則稱 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收斂於 $x_0$, 記作 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$。

定理2: 如果 Hilbert 空間 $H$ 是可分的, 則 $H$ 中的單位球 $V$ 上的任何序列都有弱收斂的子序列。

證: 設 $H$ 爲 $l_2$ (因爲任何可分的 Hilbert 空間與 $l_2$ 同構), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $l_2$ 中的單位球 $V$ 上的任一序列 ($\|x_n\| \leq 1, n = 1, 2, \cdots$) 再設

$$\begin{array}{l} x_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1i}, \cdots) \\ x_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2i}, \cdots) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{ni}, \cdots) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

對上述方陣使用"對角線方法", 有 $x_{n_k} = (\xi_{n_k 1}, \xi_{n_k 2}, \cdots, \xi_{n_k i}, \cdots)$ ($\|x_{n_k}\| \leq 1$), 使得 $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k i} = \xi_i (i = 1, 2, \cdots)$。命 $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots)$, 而 $\sum_{i=1}^{N} |\xi_{n_k i}|^2 \leq 1$, 再命 $k \to \infty$, 便有 $\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 \leq 1$, 由於 $N$ 可任意大, 故 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leq 1$, 即 $x_0 \in V$。

以下證明, $x_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}} x_0$。事實上, 對任一 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i, \cdots) \in l_2$, 應有 $M > 0$, 使 $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 \leq M$, 而

$$\begin{aligned} &|\,(x_{n_k}, y) - (x_0, y)| \\ &= |(x_{n_k} - x_0, y)| \\ &\leq \|x_{n_k} - x_0\| \|y\| \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{M} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{M} \Big(\sum_{i=1}^{N} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big|^2 \\ &\qquad + \sum_{i=N+1}^{\infty} \Big|\xi_{n_k} i - \xi_i\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

但當 $k \to \infty$ 時, $\sum_{i=1}^{N} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big|^2 \to 0$, 又因 $\sum_{i=1}^{\infty} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big|^2 < \infty$, 故對任給 $\varepsilon > 0$, 只要 $N$ 足夠大, 就有 $\sum_{i=N+1}^{\infty} \Big|\xi_{n_k i} - \xi_i\Big| < \varepsilon$, 因而 $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}, y) = (x_0, y)$, 由 $y$ 的任意性, 於是 $x_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}} x_0$。證畢。

## 参考資料

1. 鄭維行 · 王聲望編, 「實變函數與泛函分析概要」, 高等教育出版社, 1980年6月。
2. 夏道行編著, 「實變函數論與泛函分析」, 高等教育出版社, 1985年。

—本文作者任教於安徽阜陽師範學院