阿凡提巧拆金環與完備分拆

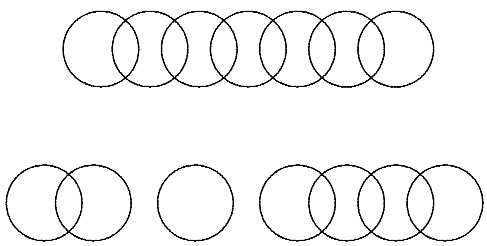
柳柏濂

一. 阿凡提的故事

阿凡提是維吾爾族傳說中的聰明人, 在民間中流傳著不少關於他機靈智巧的故事。

一次, 阿凡提給巴依打短工, 商定的時間是十天。三天以後, 貪婪的巴依想出一個壞點子賴賬。他拿出一串光燦燦的金鏈, 當著大家的面對阿凡提打賭道:“這是7個環連成的金鏈, 如果從今天起, 你能夠第一天取1個環, 第二天取2個環, 第三天取3個環,· · ·, 第七天取7個環, 而你只准許砍斷一個環。那麼, 這串金鏈就歸你所有。要是你辦不到的話, 別說金鏈, 甚至工錢也休想拿走, 十天的工作也算是白幹了。”

阿凡提默然應允。他把金鏈的第3個環砍斷, 七個環的鏈就被分成1個,2個,4個環的小鏈。



第一天, 阿凡提拿走1個環。

第二天, 他把1個環放回去拿走2個環。

第三天, 他把1個與2個環一起拿走。

第四天, 放回3個環拿走4個環。

第五天, 把1個與4個環一起拿走。

第六天, 放回1個換走2個, 即共拿走6個環。

第七天, 把整條金鏈拿走。

愚蠢的巴依捶胸頓足地哀嘆:“跟有學問的人是不能隨便開玩笑的。”

二. 並非用在打賭上

誠然, 我們講的僅僅是一個杜撰的故事。巴依再愚蠢, 也不至於到第七天才頓悟到自己已經輸定了。

文獻中沒有記載過阿凡提是否學過代數或組合數學。然而, 他確實用到了“數分拆”的道理。儘管, 今後我們無須企望再遇見第二個如此愚蠢的巴依, 然而, 深入思考和探索故事中的數學, 也決非只能用在打賭上。

我們考察下面的問題, 要解決它仍然需要阿凡提式的機智。

問題: 有一堆重量爲整數克的零件, 其重量範圍是1克至 n 克均齊備。現要用天平在一邊放砝碼的方法秤量它們, 如何選取一組砝碼, 使每個零件可用唯一的一種方法秤出來。

問題: 找一組電阻, 使它可用唯一的方法配成1到 n 個單位齊備的電阻箱。

這類問題, 在數學上稱爲完備分拆 (perfect partition) 問題。

讓我們還是從阿凡提的故事, 領悟一下什麼是完備分拆。

衆所周知,7這個正整數可以寫成若干個正整數之和。例如,

$$\begin{aligned} 7 &= 3+4=1+2+4=1+1+2+3 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1, \end{aligned}$$

這裡的每一個和式 (尚未全部列出), 稱爲7的一個分拆 (partition)。如果和式中有 r 項, 稱爲 r 分拆。例如上述從左至右的式子可分別稱爲7的1分拆,2分拆,3分拆,4分拆, 7分拆。在分拆中, 我們並不考慮各部分的次序。

因此, 上述各分拆可分別記爲 $3,4$; $1,2,4$; $1^2,2,3$; 1^7。我們考察1,2,4, 它正是阿凡提的傑作。它的特別之處在於: 僅用3部分 $1,2,4$ 可以唯一地表示一切不大於7的正整數的分拆 (當然, 故事中沒有要求唯一性)。易見

$$6=2+4,\ 5=1+4,\ 4=4,$$
$$3=1+2,\ 2=2,\ 1=1,$$

分拆 $1,2,4$ 稱爲 7 的完備分拆。

作爲嚴格的數學定義, 我們有

定義 (分拆和完備分拆): 把正整數 n 表成若干個正整數之和, 叫做 n 的分拆。分拆中所分成的正整數的個數稱爲分拆的部分數。若一個分拆包含不大於 n 的所有正整數的一個唯一分拆, 則這個分拆稱爲 n 的完備分拆。

容易知道: 一個正整數 n 的完備分拆是必定存在的。誰都能夠立即看出來的一個完備分拆是 1^n, 稱之爲平凡完備分拆。那麼, 自然而來的問題是: 我們能否把 n 的所有完備分拆都找出來呢?

回答是肯定的。

三. 一一對應找出完備分拆

我們先注意到一個明顯的事實: 一個完備分拆必須含有一個部分是1, 否則, 它就不能包含1這個正整數的分拆。

設分拆中有 (q_1-1) 個 $1(q_1>1)$, 則所有小於 q_1 的數都必可唯一地 (用1) 表成分拆。但是, 要把數 q_1 表成分拆, 必須有另一部分 q_1。若分拆的下一部分是 $q_1^{q_2-1}$, 則所有小於 q_1q_2 的數都可用 $1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}$ 唯一地表成分拆, 但數 q_1q_2 表成分拆, 必須要增加一部分 q_1q_2。若分拆的下一部分是 $(q_1q_2)^{q_3-1}(q_3>1)$, 則所有小於 $q_1q_2q_3$ 的數可用 $1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}$ 唯一地表成分拆。但要把數 $q_1q_2q_3$ 表成分拆, 必須增加另一部分 $q_1q_2q_3$ 。

如此繼續, 得

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}(q_1q_2q_3)^{q_4-1}\cdots (q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}, \quad (1)$$

它能把 $[1,n]$ 中的所有整數唯一地表成分拆。這裡,

$$\begin{aligned} n &= 1\cdot(q_1-1)+q_1(q_2-1) \\ &\quad +q_1q_2(q_3-1)+q_1q_2q_3(q_4-1)+ \\ &\quad \cdots+q_1q_2\cdots q_{k-1}(q_k-1) \\ &= q_1q_2\cdots q_k-1 \\ &\qquad (q_i>1, i=1,2,\cdots,k) \end{aligned}$$

於是

$$n+1=q_1q_2\cdots q_k。 \tag{2}$$

上述分析表明: n 的每一個形如 (1) 式的完備分拆一一對應於 $n+1$ 的一個形如 (2) 式的有序分解。(請注意:(2) 式的 $q_1,q_2,\cdots q_k$ 是有序的)。於是, 要找出 n 的所有完備分拆 (1), 只須做出 $n+1$ 的所有有序分解 (2)。

歸納上述結論, 得到

定理1(Rirdon [1]): 正整數 n 的完備分拆的個數與 $(n+1)$ 的無單位1的正因子的有序分解的個數相等。若

$$\begin{aligned} &n+1=q_1q_2\cdots q_k, \\ &q_i>1, i=1,2,\cdots,k, \end{aligned}$$

則 n 的完備分拆是 $1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}$ (或簡記爲 $n\sim 1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}$)。

例如, 求7的所有完備分拆。

解: 先把 $7+1=8$ 作有序分解, 得

$$8\ ;\ 4\times2\ ;\ 2\times4\ ;\ 2\times2\times2.$$

由定理1, 對應的完備分拆是

$$1^{8-1}=1^7\ ;\ 1^3,4\ ;\ 1,2^3\ ;\ 1,2,4$$

由定理1, 我們可以看到, 只要作出了 n 的一個有序分解, 我們無須做出完備分拆, 就能知道它的部分數 Q, 因爲

$$\begin{aligned} Q &= (q_1-1)+(q_2-1)+\cdots+(q_k-1) \\ &= (q_1+q_2+\cdots+q_k)-k \end{aligned} \tag{3}$$

運用 (3) 式, 我們可以直接對上述7的完備分拆作出驗證。

四. 數學比阿凡提更聰明

阿凡提不愧爲聰明人。他的機靈之處不僅在於找出了7的完備分拆, 而且按照巴依只准斷開一個環的限制, 準確地選擇了7的一個部分數最小的完備分拆1,2,4。

對於不大的數7, 阿凡提當然能憑他的機智的直觀。然而, 對於任意一個 n, 如何能夠做到, 無須把所有完備分拆羅列出來, 就直接找出具有最小的部分的一個呢?

這必須依靠比阿凡提更聰明的數學了。

注意到 (3) 式, 用數學的語言表達, 我們的問題是: 在約束條件 $q_1q_2\cdots q_k=n+1$, $q_i\geq 2$ 下, 求目標函數 (3) 的最小值。

乍看起來, 這似乎是一個熟知的極值問題: 在 k 個正數積爲定值時, 求它們和的極小值。然而, 注意到目標函數 Q 右邊的 k 仍是一個變量, 我們就不能用慣常的手法去求解。

爲此, 先證明下列

引理1: 設 $m=q_1q_2\cdots q_l$, $q_i\geq 2$, $i=1,2,\cdots l$ 且 $\sigma(m)=q_1+q_2+\cdots+q_l$, 則 $\sigma(m)\leq m$ 。

證明: 因 $q_i \geq 2,\ i=1,2,\cdots,l$, 故

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(m)}{m} &= \frac{q_1+q_2+\cdots+q_l}{q_1q_2\cdots q_l}\\ &\leq \frac{1}{q_2\cdots q_l}+\frac{1}{q_1q_3\cdots q_l}+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{q_1\cdots q_{l-1}}\\ &\leq \frac{1}{2^{l-1}}\cdot l=\frac{2^l}{2^l}\leq 1。\end{aligned}$$

引理2: 設 $m=q_1\cdots q_k,\ q_i\geq 2, i=1,2,\cdots,k$, 則當且僅當 $q_1,q_2,\cdots q_k$ 均是素數時, k 最大, 因而 $\sigma(m)$最小。

證明: 設

$$\begin{aligned} m &= q_1q_2\cdots q_l &(4)\\ &= p_1p_2\cdots p_k &(5)\end{aligned}$$

這裡 (5) 是 m 的一個素分解。

熟知, 若不考慮因子的次序, m 的素分解是唯一的, 故 $l\leq k$, 若且唯若 (4) 是素分解時 $l=k$。

注意到 (4) 中有可能有合數的因子, 依據引理1, 便得

$$p_1+p_2+\cdots+p_k\leq q_1+q_2+\cdots+q_l。$$

反之, 若 k 最大 ($\sigma(m)$最小), 顯然, m 必是素分解。

於是, 我們便立即得到如下一個完整的回答。

定理2: 設 $n+1=q_1q_2\cdots q_k, q_i\geq 2$, $i=1,2,\cdots,k$, 若且唯若 $q_1,q_2\cdots,q_k$ 均是素數時, 其對應的 n 的完備分拆

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}$$

的部分數

$$Q=(q_1+\cdots+q_k)-k$$

最小。

定理2告訴我們: 對於任一個給定的正整數 n, 欲做出它的部分數最小的完備分拆, 只需寫出 $n+1$ 的素分解式並作出相應的完備分拆, 而無須把所有的完備分拆都列出來加以比較。由於 $n+1$ 的素分解可有多種順序的因子排列, 故 n 對應的部分數最小的完備分拆不是唯一的。

具體地, 若 $n+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的素數。由定理2, 容易知道

1. n 帶最小部分數的完備分拆有 $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i(p_i-1)$ 部分。
2. n 帶最小部分數的完備分拆個數有 $\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$ 個。

例如, 考察 35 的完備分拆。

因 $35+1=2^2\cdot 3^2$, 放 35 的所有完備分拆中, 最小部分數是 $2\times(2-1)+2\times(3-1)=6$。

這一類完備分拆共有 $\frac{(2+2)!}{2!2!}=6$ 個。它們是

$$\begin{array}{ll}(1)1,2,4^2,12^2 & (2)1,2^2,6,12^2\\ (3)1,2^2,6^2,18 & (4)1^2,3^2,9,18\\ (5)1^2,3,6^2,18 & (6)1^2,3,6,12^2\end{array}$$

(想想看, 它們是怎樣構作出來的?)

五.　遞歸—用電腦求出完備分拆個數

至此, 我們已經明瞭了: 對任一個自然數 n, 如何構作出所有完備分拆。當然, 有多少個完備分拆的問題也就迎刃而解了。

然而, 如果僅僅通過構作並羅列出所有完備分拆的方法去求出分拆的個數, 這未免太笨拙了。況且, 對於較大的 n, 即使有了構作完備分拆的可行方法, 但要把所有這類分拆構作出來, 也是不勝其繁的。

爲了敍述方便, 我們把 n 的完備分拆的個數記作 $Pe(n)$。既然, 僅對於較大的 n, 求 $Pe(n)$ 難於對付, 那麼, 一個自然的想法是, 能否把 $Pe(n)$ 用一些 $Pe(k)$ $(k<n)$ 表示。這就是數學上的遞歸思想。如果有了 $Pe(n)$ 的遞歸式, 我們就能按 n 的數值從小到大地求出 $Pe(n)$。運用電腦及遞歸式, 我們將容易求得任何 $Pe(n)$。

由定理1, 我們已經知道,

$$\begin{aligned} n+1 &= q_1q_2\cdots q_r \\ &\Leftrightarrow n\sim 1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1} \\ &\quad\cdots(q_1\cdots q_{r-1})^{q_r-1} \\ &\quad(q_i>1, i=1,2,\cdots r) \end{aligned}$$

這裡, 因 " $\Rightarrow$ " 表示導出。" $\sim$ " 意義見定理1。

考察 $n+1$ 的任一個眞因子 k, $1<k<n+1$, 於是 $k=q_1\cdots q_l\to k-1\sim 1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1\cdots q_{l-1})^{q_l-1}\Rightarrow 1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1\cdots q_{l-1})^{q_l-1}\cdot(q_1\cdots q_{l-1}q_l)^{\frac{n+1}{k}-1}\sim n$ 上面的最後一式是 n 的一個完備分拆。

這表明: $k-1$ 的一個完備分拆對應於 n 的一個完備分拆。易見, $n+1$的不同眞因子 k (因而, 不同的$k-1$) 的完備分拆對應於 n 的不同完備分拆。

最後, 我們還應注意一個事實: 若 $n+1$ 沒有大於1的眞因子, 即 $n+1=q_1$ (等價於 $q_1-1=n$) 它一一對應於 n 的平凡完備分拆 $n\sim 1^n$。於是, 我們得到下列遞歸關係。

定理3:

$$Pe(n)=\sum_{\substack{1<k<n+1\\ k|(n+1)}}Pe(k-1)+1 \qquad (6)$$

初始值 $Pe(1)=Pe(2)=1$。

例: 求$Pe(11)$

解: $11+1=2^2\cdot 3$, 12的眞因子是 2,3,4,6

$$Pe(2-1)=1,\quad Pe(3-1)=1,$$
$$Pe(4-1)=2,\quad Pe(6-1)=3$$

故

$$\begin{aligned} Pe(11) &= Pe(1)+Pe(2)+Pe(3) \\ &\quad +Pe(5)+1=8 \end{aligned}$$

誠然, 依據定理3, 用手算仍嫌不便。如果運用電腦, 可以對 n 的數由小到大, 編製出關於 $Pe(n)$ 的表, 方便於直接查閱。

六. 反演—直接求出 $Pe(n)$ 的顯式。

從應用上, 定理3已經解決了求 $Pe(n)$ 的問題。然而, 作爲一個數學問題來說, 僅僅得到 (6) 式, 總覺得未臻完美。數學家追求的, 是徹底而漂亮地解決問題, 即求出 $Pe(n)$ 的顯表達式。

在我們的面前, 有一條顯見的路: 通過遞歸式 (6), 解出 $Pe(n)$ 的表達式。這涉及到一個解遞歸式的問題。然而, 細看 (6) 式, 用現成的方法 (例如特徵方程方法) 極難求出 $Pe(n)$ 的顯表達式。因此, 這是一條僅有路口, 而通不到目的的路。

於是, 我們再從 n 的完備分拆的構作中尋找突破口。

由定理1, 我們知道: 求 $Pe(n)$, 即求 $n+1$ 中不同有序分解的個數。於是, 問題歸結爲如何求出 $n+1$ 的所有有序分解的個數來。

我們把這一問題賦予組合意義而解決之。

考察 $(n+1)$ 的有序素分解

$$n+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$
$$p_i\text{素數},\ i=1,2,\cdots,k。$$
$$\text{記}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=s。$$

求 $n+1$ 的所有有序分解 (不一定是素分解), 相當於把 α_1 個第一類物 (即 p_1), α_2 個第二類物 (即p_2), $\cdots,\alpha_k$ 個第 k 類物 (即p_k) 放入 m $(m=1,2,\cdots s)$ 個有標號的盒中, 使這些盒無一是空的方法總數。

上述的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 類物, 我們記爲 $[n+1]=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$。

把 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 放進 m 個盒中的方法數記爲 $U([n+1],m)$, 而其中每一盒都非空的方法數記爲 $R([n+1],m)$。

由排列組合的知識, 我們知道: 放 α_i 個相同的物到 m 個不同的盒的方法數是 $\binom{\alpha_i+m-1}{\alpha_i}$。按乘法原則

$$U([n+1],m)=\Pi_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i+m-1}{\alpha_i} \quad (7)$$

另一方面, 把 $(\alpha_i,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 個物放到 m 個不同盒裡, 恰有 j 個 $(0\le j\le m)$ 盒空的方法數是

$$\binom{m}{j}R([n+1],m-j)$$

於是

$$U([n+1],m)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}R([n+1],m-j) \quad (8)$$

由 (8) 式, 只要能反過來, 用 $U([n+1],m)$ 表示 $R([n+1],m)$, 就能求出我們需要的解。

下面將要用到一個稱爲二項式反演的公式:

$$V_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}U_k$$
$$\Leftrightarrow U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}V_k \quad (9)$$

證明: 先證 “ $\Rightarrow$ ” 部分。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}V_k\\ =&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}U_i\\ =&\sum_{i=0}^{n}\Big[\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\Big]U_i\\ =&\sum_{i}\delta_{ni}U_i=U_n,\end{aligned}$$

這裡 δ_{ni} 是 Kroneker 符號, 即 $n=i$ 時 $\delta_{ni}=1$, 其餘$\delta_{ni}=0$。

同理可證“$\Leftarrow$”部分, 留給讀者作爲一個練習。

用反演公式 (9), 由 (8) 立即得

$$\begin{aligned} &R([n+1],m)\\ =& \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}U([n+1],m-j) \end{aligned}$$

把 (7) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} R([n+1],m) \ =& \ \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\\ & \Pi_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i+m-j-1}{\alpha_i} \end{aligned}$$

注意到 $Pe(n)$的組合意義, 得

$$P_e(n)=\sum_{m=1}^{s}R([n+1],m)$$

於是, 便證明了下列定理。

定理 4: 若因子分解 $n+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1,p_2,\cdots p_k$ 是不同的素數, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=s$, 則

$$\begin{aligned} Pe(n) \ =& \ \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\\ & \cdot\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i+m-j-1}{\alpha_i} \qquad (10) \end{aligned}$$

茲舉一例。求 $Pe(35)$。

$$35+1=2^2\cdot 3^2,\ \alpha_1=2,\alpha_2=2$$

$$s=4,\quad k=2$$

由 (10) 式

$$\begin{aligned} &Pe(35)\\ =& \sum_{m=1}^{4}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\\ &\cdot\binom{2+m-j-1}{2}\binom{2+m-j-1}{2}\\ =& \ 1+7+12+6\\ =& \ 26 \text{。} \end{aligned}$$

運用 (10) 式僅涉及到 $n+1$ 的素分解 (無序), 因此, 便於應用。運算表明,(10) 的結果和遞歸式 (6) 的結果是完全一致的。

參考文獻

1. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, New York, Wiley, 1958.
2. L. Bolian, On enumeratioin of perfect partition, Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 12(1991), 79-82.

—本文作者任教於中國華南師範大學數學系—