# 三角形內的比例線段(四)

劉俊傑

## 前言:

本文與之前的兩篇文章, 在結構上將有著明顯的不同, 前面的兩篇文章 [2][3], 都是一口氣導引出環環相扣的二十幾道性質, 且都是在討論比例值爲1:2 的比例三角形。本篇文章則是將要針對兩個重要的議題, 作專題的探討, 這兩個專題都相當地有趣, 且具有發展性, 在整個"比例三角形"的理論中, 獨樹一格。我簡稱這兩個議題爲"平行時的比例值"及"三合一定理"。

## 一. 平行時的比例值

相信在看過前兩篇文章的讀者, 都將會對性質1和性質2留下深刻的印象 [2], 因爲它們被引用來推理其它性質次數最多, 也就是說許多的性質都必須以這兩個性質作爲基礎。而事實上性質2又是直接地由性質1所推出, 可見得性質1可以說是整個理論系統的起源磐石。

性質1告訴我們, 當比例值爲1:2時, 第三層的小三角形的邊將和最外層三角形的邊平行。從這個平行性質, 就可以衍生出許多其它幾何性質。這使我們不禁想到是否能求得別的比例值, 能使內外三角形的邊平行, 進而找到另一新的天地呢? 此疑問的答案, 就在以下的這個證明裡。

性質38: 已知:

1. $\triangle DEF$ 的頂點在 $\triangle ABC$ 的中線上。
2. $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 共重心 $O$。

求證: $DF//BC$ (如圖1)

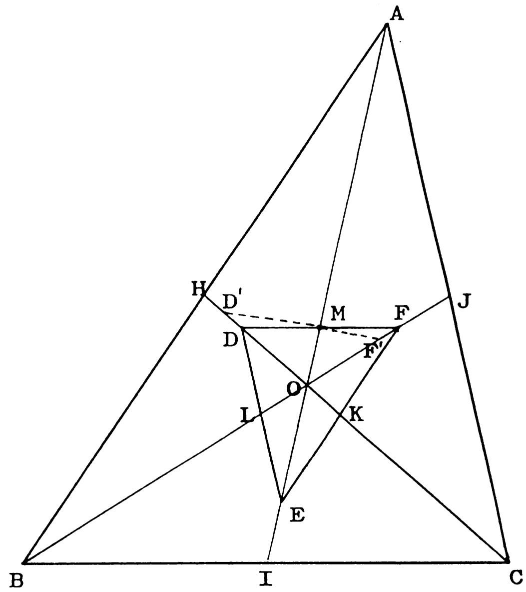


圖 1

證明:

1. 假設 $DF \not\parallel BC$, 過 $M$ 點作 $D'F'//BC$。$AI$ 是中線 $\Rightarrow D'M = MF'$。
2. $O$ 是 $\triangle DEF$ 之重心 $\Rightarrow DM = MF$。
   得到$DD'FF'$是平行四邊形, 因此 $DD'//FF'$。
   $DD'$ 在 $CH$ 上, $FF'$ 在 $BJ$ 上。
   $CH \not\parallel BJ \Rightarrow DD' \not\parallel FF'$。
   故矛盾, 得知假設錯誤, 所以 $DF//BC$。

然後, 應用這個性質, 就可以輕鬆地解決求平行比例值的問題。

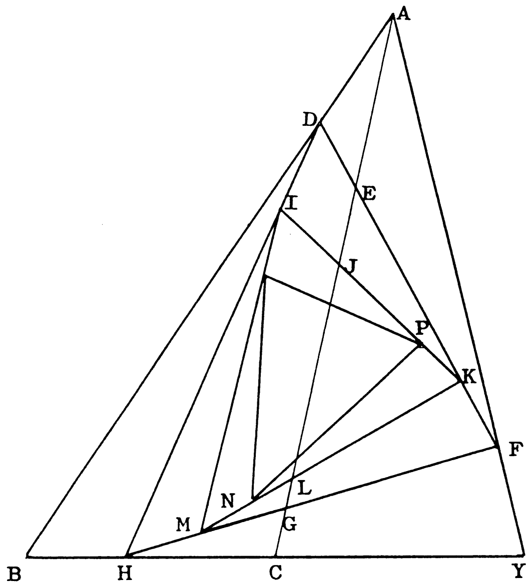


圖 2

性質39: 求平行比例值

1. 令 $\frac{AD}{DB} = \frac{BH}{HY} = \frac{YF}{FA} = \frac{DI}{IH} = \cdots = \frac{KP}{PI} = \frac{1}{X}$,
   $AC$ 是中線 (如圖2) $\Rightarrow \frac{HC}{CY} = \frac{X-1}{X+1}$ 。
   根據 Menelaus 定理, 得知
   $$\frac{HG}{GF}=\frac{X-1}{X}。$$
   若 $M$ 落在 $AC$ 線上
   $$\Rightarrow \frac{HG}{GF} = \frac{HM}{MF} = \frac{1}{X}。$$
   $\frac{X-1}{X} = \frac{1}{X} \Rightarrow X = 2$ 。
   引用 Pappus 定理, 知 $\triangle IMK$ 和 $\triangle ABY$ 共重心。
   再由性質38 $\Rightarrow IK//BY$, 故 $X = 2$ 時, 轉第2次, 也就是第3層, 會出現平行的現象。
2. 由公式 III-1(請見 [1]), 得 $\frac{DE}{EF} = \frac{1}{X}$
   另由公式 V-4, 得
   $$\frac{IJ}{JK} = \frac{2X-1}{X^2-1},$$
   $$\frac{X^2-1}{2X-1} = \frac{1}{X}$$
   $\Rightarrow X^3 - 3X + 1 = 0$ 代入三次方程式一般解公式 [4], 得$X = 2\cos 320°$。
   這是第4層的解。

同樣的方法, 可以求得更高層的解, 以下僅列出其比例值和圖形。

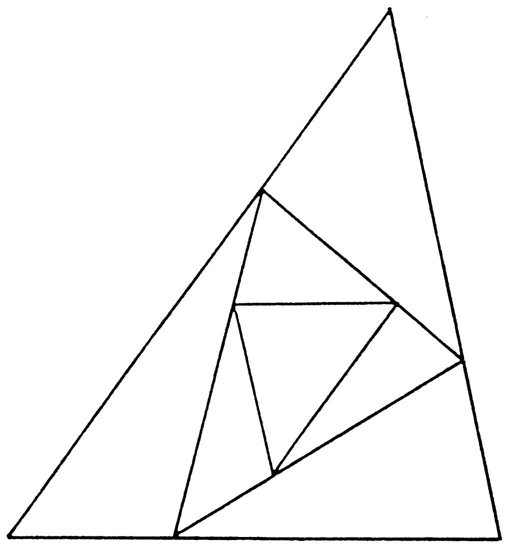

圖 3

平行時的比例值

| 層 | 圖 | 方程式 | 解 | 約值 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | $x-1=0$ | 1 | 1 |
| 3 | 3. | $x^2-2x=0$ | 2 | 2 |
| 4 | 4. | $x^3-3x^2+1=0$ | $1+2\cos 20^0$ | 2.879385242 |
| 4 | 5. | $x^3-3x+1=0$ | $2\cos 320^0$ | 1.532088886 |
| 5 | | $x^4-4x^3+4x-1=0$ | $2+\sqrt{3}$ | 3.732050808 |
| 5 | 6. | $4x^3-6x^2+1=0$ | $\frac{1}{2}+\cos 30^0$ | 1.366025404 |
| 6 | 7. | $x^5-10x^3+10x^2-1=0$ | $\frac{(3\sqrt{5}-1+\sqrt{6}\sqrt{5-\sqrt{5}})}{4}$ | 2.445124904 |
| 6 | 8. | $x^4-5x^3+10x-5=0$ | $\frac{(5+3\sqrt{5}+\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}})}{4}$ | 4.57432919 |
| 6 | 9. | $x^4-5x^3+10x-5=0$ | $\frac{(5+3\sqrt{5}-\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}})}{4}$ | 1.279772775 |
| 7 | 10. | $x^6-6x^5+20x^3-15x^2+1=0$ | $2+2\sqrt{3}\cos 10^0$ | 5.411474128 |
| 8 | | $x^7-7x^6+35x^4-35x^3+7x-1=0$ | ? | ? |

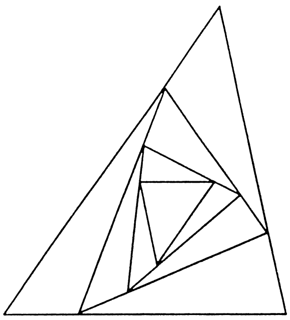

圖 4

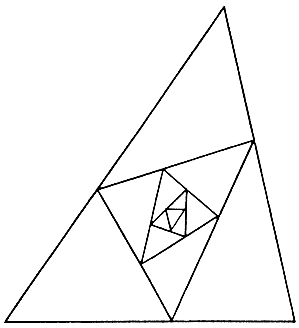

圖 6

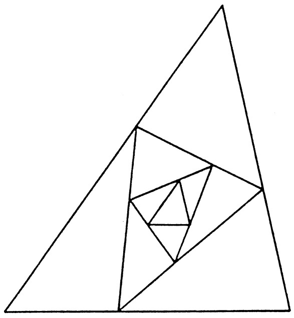

圖 5

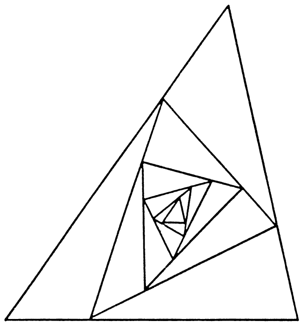

圖 7

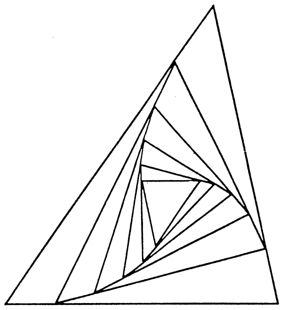

圖 8

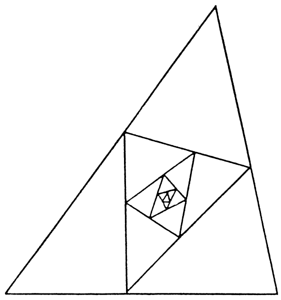

圖 9

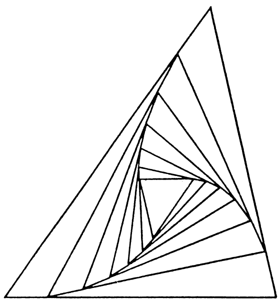

圖 10

更高層的解, 由於我無法將方程式因式分解至四次以下多項式的乘積, 其解不可得。在解這些方程式時, 會得到互爲倒數的解, 利用鏡射變換, 可知它們的圖形是相同的, 故僅列一解。而在能轉出平行邊的比例三角形圖形中, 將可以找到許多的共線點和平行線。

在比例三角形中存在著很多和諧巧妙的情形, 如上述的方程式也可以在求弦三角形邊長時獲得 (見圖11),

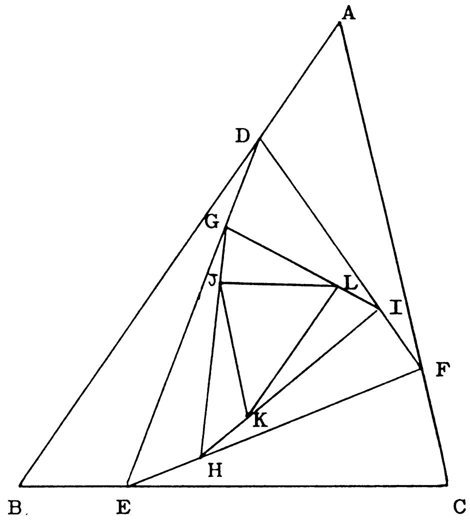


圖 11

由餘弦定理可以求得:

$$
\begin{aligned}
DE = {} & (X+1)^{-1}[X(X-1)AB^2 \\
& -(X-1)BC^2 + XCA^2]^{\frac{1}{2}} \\
GH = {} & (X+1)^{-2}[X(X+1)(X-1) \\
& (X-2)AB^2 - X(X-2) \\
& (2X-1)BC^2 \\
& +(X+1)(X-1)(2X-1)CA^2]^{\frac{1}{2}} \\
JK = {} & (X+1)^{-3}[(X^3-3X+1) \\
& (X^3-3X^2+1)AB^2 \\
& -3X(X-1)(X^3-3X^2+1)BC^2 \\
& +3X(X-1)(X^3-3X+1)CA^2]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

## 二. 三合一定理

在此所稱的三合一定理, 是指 (1) 三線共點 (2) 比例值相等 (3 ) 共重心等三種性質同時出現的情形。

三合一現象, 最早比較明確的出現, 是在比例值爲1:2的圖。(見圖12, 請留意虛線

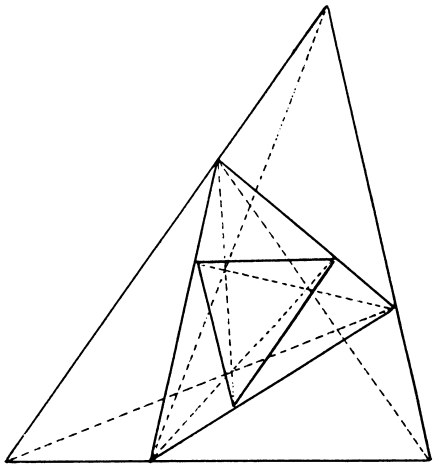

圖 12

的部份), 當完成了有關這個圖的證明後, 才查覺到比例值應可爲任意值, 於是乎來到了下列的這個圖, 這也就是第一篇的例題2。

已知: $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=a$, $\frac{AG}{GB}=\frac{BR}{RC}=\frac{CS}{SA}=\frac{DI}{IE}=\frac{ET}{TF}=\frac{FH}{HD}=c$, 求證 (1) $CG$, $FI$, $EH$ 共點 (2) $\frac{LM}{MN}=a$ (3 ) $\triangle ABC$ 和 $\triangle QPM$ 共重心。(如圖13)

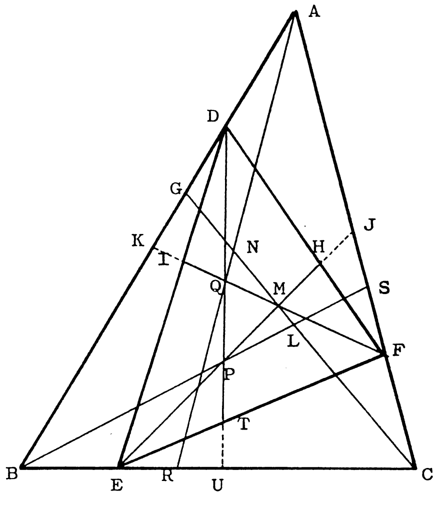


圖 13

請各位讀者仔細看看這個圖, 事實上它是考慮比例值的情形下在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 內作出一模一樣的圖, 然後重疊在一起所產生的。在使用線段比公式, 推導出它證明後, 又赫然想到線段不一定要從三角形的頂點畫出, 而且比例值也可以是負的, 也就是外分點, 如此就得到了圖14和圖15, 它們也確實都能滿足三合一的現象, 實際上隨著比例值的變化, 還會產生其它一些”奇形怪狀”的圖。

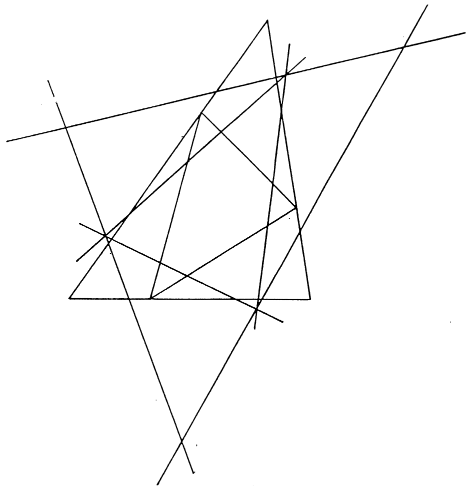

圖 14

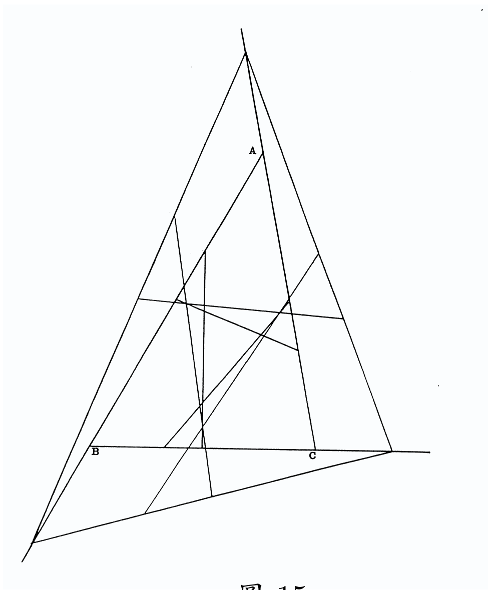


圖 15

我曾使用線段比例公式完成了圖14情形的證明, 其證明過程相當地冗長複雜。但如前所述, 當比例值改變時, 圖形也跟著產生變化, 更重要的是有些證明過程中的步驟將不適用於不同的圖形。因此如果用平面幾何的方法, 每個圖都要給出一個證明, 至此平面幾何似乎顯得有些捉襟見肘, 只好借助解析幾何的方法, 才能輕鬆地得到一般化的證明。

性質40: 已知: $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{1}{a}$, $\frac{AG}{GB}=\frac{BH}{HC}=\frac{CI}{IA}=\frac{DM}{ME}=\frac{EN}{NF}=\frac{FP}{PD}=\frac{1}{b}$, $\frac{AJ}{JB}=\frac{BK}{KC}=\frac{CL}{LA}=\frac{DQ}{QE}=\frac{ER}{RF}=\frac{FS}{SD}=\frac{1}{c}$。求證:(1)$\overleftrightarrow{GK}$, $\overleftrightarrow{QP}$, $\overleftrightarrow{MR}$ 共點 (2)$\frac{TW}{WU}=\frac{1}{a}$ (3 )$\triangle ABC$ 和 $\triangle TUV$ 共重心 (如圖16)。

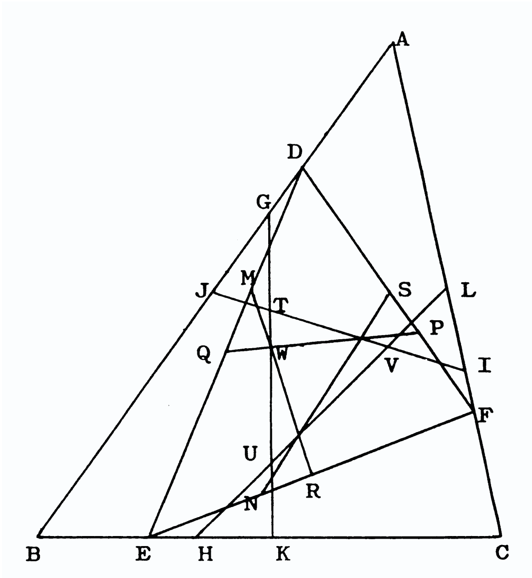

圖 16

證明:

(1) 令 $A=(m,n)$, $B=(0,0)$, $C=(s,0)$,

可知:

$$D=(\frac{am}{a+1},\frac{an}{a+1}),\qquad E=(\frac{s}{a+1},0),\qquad F=(\frac{as+m}{a+1},\frac{n}{a+1}),$$

$$G=(\frac{bm}{b+1},\frac{bn}{b+1}),\qquad H=(\frac{s}{b+1},0),\qquad I=(\frac{bs+m}{b+1},\frac{n}{b+1}),$$

$$J=(\frac{cm}{c+1},\frac{cn}{c+1}),\qquad K=(\frac{s}{c+1},0),\qquad L=(\frac{cs+m}{c+1},\frac{n}{c+1}),$$

$$M=(\frac{abm+s}{(a+1)(b+1)},\frac{abn}{(a+1)(b+1)}),\qquad P=(\frac{abs+am+bm}{(a+1)(b+1)},\frac{an+bn}{(a+1)(b+1)}),$$

$$Q=(\frac{acm+s}{(a+1)(c+1)},\frac{acn}{(a+1)(c+1)}),\qquad R=(\frac{m+as+cs}{(a+1)(c+1)},\frac{n}{(a+1)(c+1)}),$$

因此 $\overleftrightarrow{GK}: bn(c+1)X+(bs+s-bcm-bm)Y=bsn$

$$\overleftrightarrow{QP}:\frac{Y-\frac{acn}{(a+1)(c+1)}}{X-\frac{acm+s}{(a+1)(c+1)}}=\frac{an+bn+bcn-abcn}{abcs+bcm+abs+am+bm-abcm-bs-s}$$

$$\overleftrightarrow{MR}:\frac{Y-\frac{n}{(a+1)(c+1)}}{X-\frac{m+as+cs}{(a+1)(c+1)}}=\frac{abcn+abn-bn-n}{abcm+abm+s-bm-abs-bcs-m-as}$$

得到$\overleftrightarrow{GK}$ 和 $\overleftrightarrow{QP}$ 的交點 $W$ 在

$$\left(\frac{s-bcm+ab^2c^2m-abcs+b^2cs+ab^2s+abm+b^2m}{(a+1)(1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc)}, \frac{bn(a+b-c+abc^2)}{(a+1)(1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc)}\right)$$

代入 $\overleftrightarrow{MR}$ 方程式, 合, 故 $W$ 在 $\overleftrightarrow{MR}$ 上 $\Rightarrow \overleftrightarrow{GK}, \overleftrightarrow{QP}, \overleftrightarrow{MR}$ 共點。

(2) $\overleftrightarrow{JI}: n(bc-1)X+(bcs+m+bs-bcm)Y=bcns$

$\overleftrightarrow{LH}: n(b+1)X+(s-bm-bcs-m)Y=ns$

可得 $\overleftrightarrow{JI}$ 交 $\overleftrightarrow{GK}$ 於

$$T=\left(\frac{b(bc^2m+m+bs-cs)}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}, \frac{bn(1+bc^2)}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}\right)$$

$\overleftrightarrow{LH}$ 交 $\overleftrightarrow{GK}$ 於

$$U=\left(\frac{s-bcm+b^2m+b^2cs}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}, \frac{bn(b-c)}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}\right)$$

計算出

$$\overline{TW}=\sqrt{\frac{(s-bcm+b^2cs+b^2m-b^2c^2m-bm-b^2s+bcs)^2+b^2n^2(b-c-1-bc^2)^2}{(a+1)(1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc)}}$$

$$\overline{WU}=\sqrt{\frac{a^2(b^2m+s-bcm+b^2cs-b^2c^2m-bm-b^2s+bcs)^2+a^2b^2n^2(b-c-1-bc^2)^2}{(a+1)(1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc)}}$$

$\Rightarrow \frac{TM}{WU}=\frac{1}{a}$。

(3) $\overleftrightarrow{JI}$ 交 $\overleftrightarrow{HL}$ 於

$$V=\left(\frac{m+bs+b^2cm+b^2c^2s}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}, \frac{n(1+b^2c)}{1+b+b^2+b^2c+b^2c^2-bc}\right)$$

$\Rightarrow \triangle TUV$ 之重心在$(\frac{m+s}{3}, \frac{n}{3})$

$\triangle ABC$ 之重心在$(\frac{m+s}{3}, \frac{n}{3})$ 得證 $\triangle ABC$ 和 $\triangle TUV$ 共重心。

性質41: 已知: 1. $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{DX}{XE}=\frac{EY}{YF}=\frac{FZ}{ZP}=\frac{1}{a}$。
2. $T$ 是 $\triangle DBE$ 之重心, $W$ 是 $\triangle XEY$ 之重心, $V$ 是 $\triangle FEC$ 之重心。求證: $TWV$ 共線 (如圖17)

證明:

1. 由公式 V-(3), 有 $\frac{AG}{GB}=\frac{BH}{HC}=\frac{CI}{IA}=\frac{DM}{ME}=\frac{EN}{NF}=\frac{FP}{PD}=\frac{4a^2+7a+4}{2a^2+2a-1}$。
再由公式 V-(6), $\frac{AJ}{JB}=\frac{BK}{KC}=\frac{CL}{LA}=\frac{DQ}{QE}=\frac{ER}{RF}=\frac{FS}{SD}=\frac{2a^2+2a-1}{a^2-2a-2}$。
由性質40 $\Rightarrow QP$ 和 $MR$ 的交點在 $GK$ 上。
故 $TWV$ 共線, 且$\frac{TW}{WV}=\frac{AD}{DB}$。

這個結果是性質20的推廣, 性質20只解決了

1:2的情形, 而這裡比例值則可爲任意數。

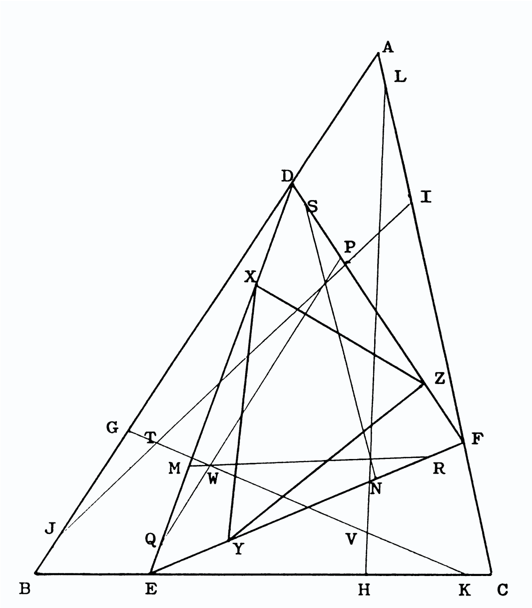


圖 17

性質 42: 已知: 1. $\frac{TD}{DM}=\frac{MK}{KL}=\frac{LJ}{JT}=\frac{DE}{EK}=\frac{KN}{NJ}=\frac{JF}{FD}$。
2. $A$ 是 $\triangle DEF$ 之重心, $B$ 是 $\triangle GHI$ 之重心, $C$ 是 $\triangle JKL$ 之重心。求證: $ABC$ 共線 (如圖18)。

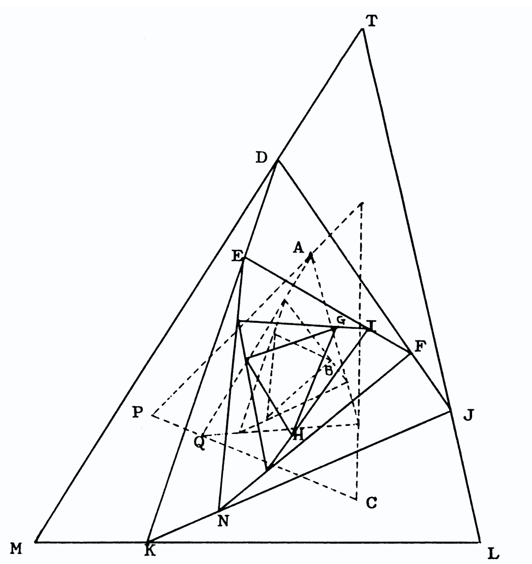


圖 18

證明:

1. 由性質41 $\Rightarrow$ $\triangle DMK$ 和 $\triangle EKN$ 和 $\triangle JKL$ 之重心共線, 即 $PQC$ 共線, 且 $\frac{PQ}{QC}=\frac{TD}{DM}$ 。依此定理向內形成以重心爲頂點的比例三角形。
2. 再利用例題1[1], 得證 $ABC$ 共線。

我曾找到另一個頗具有類似性質的圖, 也直接使用座標平面來做它的證明。

性質 43: 已知: 1. $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{1}{a}$, 2. $\triangle AFB\sim\triangle BHC\sim\triangle CMA\sim\triangle DGE$ (見圖19)。

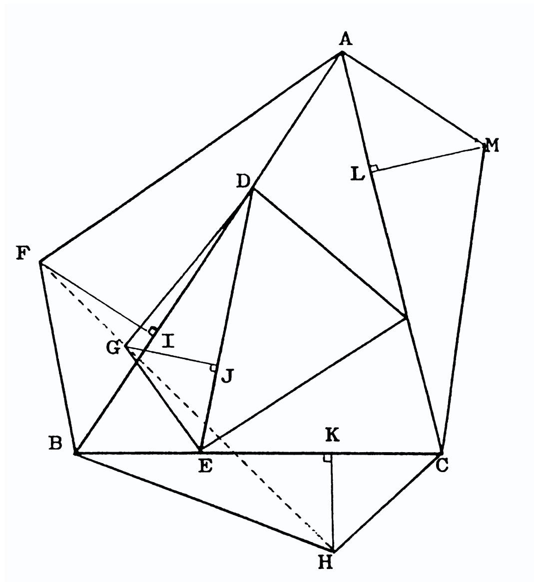


圖 19

求證:

(1) $FGH$ 共線

(2) $\frac{FG}{GH}=\frac{1}{a}$

(3) $\triangle ABC$ 和 $\triangle FHM$ 共重心 (如圖19)。

證明:

(1) 作 $FI\perp AB$, $HK\perp BC$, $HL\perp AC$, $GJ\perp DE$。因爲 $\triangle AFB\sim$

$\triangle BHC \sim \triangle CMA \sim \triangle DGE \Rightarrow \frac{AI}{IB}=\frac{BK}{KC}=\frac{CL}{LA}=\frac{DJ}{JE}$, 令 $\frac{AI}{IB}=\frac{1}{b}$。

(2) 設 $A=(m,n)$, $B=(0,0)$, $C(s,0)$

可得 $D=(\frac{am}{a+1},\frac{an}{a+1})$, $E=(\frac{s}{a+1},0)$,

$I=(\frac{bm}{b+1},\frac{bn}{b+1})$, $K=(\frac{s}{b+1},0)$,

$L=(\frac{m+bs}{b+1},\frac{n}{b+1})$,

$J=(\frac{abm+s}{(a+1)(b+1)},\frac{abn}{(a+1)(b+1)})$,

因此 $\overleftrightarrow{FI}:(Y-\frac{bn}{b+1})=(\frac{-m}{n})(X-\frac{bm}{b+1})$,

設 $F=(\frac{bm+n\ell_1}{b+1},\frac{bn-m\ell_1}{b+1})$ 。因$F$ 在 $\triangle ABC$ 外, $\frac{bm+n\ell_1}{b+1}<\frac{bm}{b+1}$ 。

故 $\ell_1<0$, $F$ 在 $\triangle ABC$ 內時, 可用相同證法證明。

$\overleftrightarrow{GJ}:(Y-\frac{abn}{(a+1)(b+1)})=(\frac{s-am}{an})(X-\frac{abm+s}{(a+1)(b+1)})$ 。

令 $G=(\frac{s+abm+an\ell_2}{(a+1)(b+1)},\frac{s\ell_2+abn-am\ell_2}{(a+1)(b+1)})$ $\ell_2<0$ 。

因 $\triangle AFB\sim\triangle DGE$, 有$\frac{GJ}{FI}=\frac{DE}{AB}$

$\Rightarrow G=(\frac{abm+s+an\ell_1}{(a+1)(b+1)},\frac{abn+s\ell_2-am\ell_2}{(a+1)(b+1)})$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{FG}:(Y-\frac{bn-m\ell_1}{b+1}) = \frac{s\ell_1+m\ell_1-bn}{s-bm-n\ell_1}(X-\frac{bm+n\ell_1}{b+1})$$

(3) 以 (2) 之方法, 得

$$H=(\frac{s}{b+1},\frac{s\ell_1}{b+1})$$

代入 $\overleftrightarrow{FG}$ 之方程式, 合, 故 $FGH$ 共線。

(4)

$$\overline{FG}=\frac{\sqrt{(bm+n\ell_1-s)^2+(bn-m\ell_1-s\ell_1)^2}}{(a+1)(b+1)}$$

$$\overline{GH}=\frac{\sqrt{a^2(bm+n\ell_1-s)^2+a^2(bn-m\ell_1-s\ell_1)^2}}{(a+1)(b+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{FG}{GH}=\frac{1}{a}$$

(5) 以 (2) 之方法, 得

$M=(\frac{m+bs-n\ell_1}{b+1},\frac{n-s\ell_1+m\ell_1}{b+1})$

$\Rightarrow \triangle FHM$ 之重心。

$(\frac{bm+n\ell_1+s+m+bs-n\ell_1}{3(b+1)},\frac{bn-m\ell_1+s\ell_1+n-s\ell_1+m\ell_1}{3(b+1)})$

$=(\frac{m+s}{3},\frac{n}{3})$

$\triangle ABC$ 之重心$=(\frac{m+s}{3},\frac{n}{3})$ 。

得證 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FHM$ 共重心。

## 結語:

在第一節中所講述的 “平行時的比例値”, 基本的求法已經建立, 剩下的問題在於高次方程式的求解, 因爲五次以上的方程式並沒有代數式的一般解公式, 可能要借助數値分析或電腦程式, 才能有更進一步的收穫。

而在第二節中的“三合一定理”, 則是我最滿意的定理, 相信應該還有許多類似的幾何圖形能符合三合一現象, 例如性質43, 也就是說現在我所看到的也只是一般定理的特例, 希後日後能在求其更一般現象方面上有所進展。

## 參考資料:


1. 劉俊傑, 三角形內的比例線段 (一), 數學傳播, 第十九卷第二期,1995年6月, 76-85。
2. 劉俊傑, 三角形內的比例線段 (二), 數學傳播, 第二十卷第三期,1996年9月, 性質1-性質20, 60-68。
3. 劉俊傑, 三角形內的比例線段 (三), 數學傳播, 第二十一卷第一期,1997年3月, 性質21-性質37, 54-66。
4. Murray R. Spiegel, ”Mathematical Handbook”, MCGRAW-HILL BOOK Company, 1968, 32-33 .
5. Howard Eves, “A Survey of Geometry”, Vol. 1


—本文作者任教於省立西螺農工—