費曼怪數！?

高欽蓮

民國83年4月16日聯合報副刊, 陳之藩教授發表一篇文章: 成功湖邊散記之四— 令人失眠的數。文中介紹令費曼大師抱恨以終的怪數 $\frac{1}{243} = 0.004, 115, 226, 337, 448, 559, \cdots$, 並呼籲中、小學的同學們加以思考, 因爲大家都學過了除法。身爲基礎科學教育工作者的我們, 自然不能缺席, 否則自已都欠缺研習科學的正確態度和精神, 又如何以身作則呢?

首先我們仍採用最笨的直接長除法, 耐著心將它計算出來, 結果如下:

$$\frac{1}{243} = 0.\overline{004, 115, 226, 337, 448, 559, 670, 781, 893},$$

啊哈!眞是如人飲水, 冷暖自知, 若不是親身體驗, 眞是無法體會爲什麼就是兩數相除嘛, 沒有幾個人願意嚐試下去, 那不是紙張夠不夠長的問題喔!

感謝“大數三位一分節”的提示, 我們獲得之心得如下:

1. 它是由廿七位數爲一循環節之純循環小數。
2. 由費曼怪數的提示, 將其每三位一劃分, 可分成九份, 前八份可知爲一等差數列, 公差爲111, 而最後一差值卻是112。

$$0.004, \overbrace{\quad}^{+111} 115, \overbrace{\quad}^{+111} 226, \overbrace{\quad}^{+111} 337, \overbrace{\quad}^{+111} 448, \overbrace{\quad}^{+111} 559, \overbrace{\quad}^{+111} 670, \overbrace{\quad}^{+111} 781, \overbrace{\quad}^{+112} 893$$

望著我們歸納的心得, 心中一直可惜所得商最後功虧一簣, 不是完整的一個等差數列。

在文中, 也說明此怪數是廖約克博士尊師費曼大師所摘錄, 約克博士也覺察出除數243是3的五次方, 我們耐心的思考“數”文中, 廖約克博士的發現, 再一起複習乘方的意義: 乘方就是被乘數自已本身連乘即 $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, 3連乘5次, 因此 $\frac{1}{243}$ 可看做 $\frac{1}{3^5}$, 也就是 $\frac{1}{3^5} = 1 \div (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 1 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3$, 即被除數1連除5個3。喲! 嘿! 這一下好算多了, 除數只有一位數又是小小的3, 的確好算多多。

接著我們按部就班, 採用逐步尋找, 分段間接求法, 整理出以下資料

1. $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$
2. $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{3} = \dfrac{0.\dot{3}}{3} = \dfrac{0.333\cdots}{3} = 0.111\cdots = 0.\dot{1}$
3. $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{\frac{1}{3^2}}{3} = \dfrac{0.\dot{1}}{3} = \dfrac{0.111\cdots}{3} = 0.037037037\cdots = 0.\overline{037}$

4. $\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{\frac{1}{3^3}}{3}=\dfrac{0.\overline{037}}{3}=\dfrac{0.037037037\cdots}{3}=0.012345679012345679\cdots$
$=0.\overline{012345679}$ (循環節由無數字8的其餘九個阿拉伯數字組成。)

5. $\dfrac{1}{243}=\dfrac{1}{3^5}=\dfrac{\frac{1}{3^4}}{3}=\dfrac{0.\overline{012345679}}{3}=\dfrac{0.012345679012345679\cdots}{3}$
$=0.\overline{004115226337448559670781893}$ (註一)

整理資料所獲心得有:

1.均是純循環小數, 循環節由十分位開始。

2.

除數	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$
循環節位數	$1(=3^0)$	$1(=3^0)$	$3(=3^1)$	$9(=3^2)$	$27(=3^3)$
各循環節數字總和	3	1	$3+7=10$	$1+2+3+4+5+6+7+9=37$	118
各循環節數字被3除	除盡	均除不盡, 餘數均為 1			

啊哈!我們有了很好的結論

(1) 除數如果是 3^A, $A\geq 2$, 則循環節爲由 $3^{(A-2)}$ 位數所組成。

(2) 除數如果是 3^A, $A\geq 2$, 則其循環節數字均不能被3除盡, 且餘數均相同爲1。

我們這時提出一個問題: 爲什麼後一個循環節位數會是其前一個循環節位數的三倍? 同學們, 你們知道答案嗎?

沒錯, 就是因爲每三個循環節數字和方能被3除盡的緣故, 因此我們也能預測 $\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$ 之商爲 $27\times 3=81$ 位數的純循環小數, 有人敢接受挑戰除除看嗎?

接下來, 我們注意到 $\frac{1}{81}=0.\overline{012345679}$, 將其循環節九等分, 則其前八份爲一等差數列, 公差爲1, 而最後一差值爲 $9-7=2$, 這不又是一個漂亮的結論嗎?

除數如果是 3^B, $B\geq 4$, 若將其循環數字九等分, 則每等分之位數爲 $3^{(B-4)}$ 位, 且其前八份爲等差數列, 公差爲 $3^{(B-4)}$ 個1組成, 而最後1個差值僅是個位數改成2而已。

眞是太令人高興, $\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$ 我們不再畏懼, 因爲我們只要將商找到小數第九位 $(3^{6-4}=9)$, 然後用公差111111111依次找出第十至第七十二位, 而再利用111111112找出最後九位, 則整個商八十一位循環節數字就找到了, 相信嗎? 其實81位用分段除法找出來也不挺麻煩的。請看

$$\frac{1}{729}=\frac{1}{3^6}=\frac{\frac{1}{3^5}}{3}=\frac{0.\overline{004115226337448559670781893}}{3}$$
$$=0.\overline{001371742,112482853,223593964,334705075,445816186,556927297,}$$
$$\overline{668038408,779149519,890260631}(\text{各位數字和}=361,\ 361\div 3=120\ldots\ldots 1)。$$

現在唯一留下令人奇怪的事就是, 爲何循環節數字最後一個差值的個位數, 都要由原來的1更改成2?

我們也很認眞的理出一個道理: 第九份之數字加上公差值, 其最大位數相加後之和均要十進位, 也就是位數要加一位, 即

$$\frac{1}{81}=0.\overline{012345679} \text{ 而 } 9+1=\underline{1}0$$
$$\frac{1}{243}=0.\overline{004115226337448559670781893} \text{ 而 } 893+111=\underline{1}004$$
$$\frac{1}{729} \quad \text{時而} 890260631+111111111=\underline{1}001371742$$

因此所進位的1反映到公差上, 就造成最後一個差值的個位數要由原來的1更改成爲2, 妙吧!我們稱之爲"進位效應"。(註二)

前面我們曾計算出除數爲 3^A, $A\geq 2$ 時, 各循環節數字之和, 它們均比3之倍數多1, 我們由另一角度觀察又發現三種有趣的規律, 請看

[1] $\quad 1 \overset{+9}{\frown} 10 \overset{+27}{\frown} 37 \overset{+81}{\frown} 118 \overset{+243}{\frown} 361\cdots\cdots\cdots \qquad =1 \overset{+3^2}{\frown} 10 \overset{+3^3}{\frown} 37 \overset{+3^4}{\frown} 118 \overset{+3^5}{\frown} 361\cdots\cdots\cdots$

即各個循環節數字和+除數=其後一個循環節數字和。

於是 (1) 第一個商者。

(2) 第二個商者=第一個商者+其除數 3^2。

(3) 第三個商者=第二個+其除數 3^3 = 第一個+(3^2+3^3)。

(4) 第四個商者=第三個+其除數 3^4 = 第一個+$(3^2+3^3+3^4)$。

(5) 第五個商者=第四個+其除數 3^5 = 第一個+$(3^2+3^3+3^4+3^5)$。

所以各商之循環節數字和爲第C 商者, $C\geq 1$, 則其和=第一商者 $+(3^2+3^3+\cdots+3^C)=1+(3^2+3^3+\cdots+3^C)$

[2] $1,10,37,118,361$ 則前一數字 $\times 3+7=$ 後一數字 (註三)

$$1\times 3+7=10$$
$$10\times 3+7=37$$
$$37\times 3+7=18$$
$$118\times 3+7=361$$

於是

1. 第一個商者
2. 第二個商者=第一個 $\times 3+7=$ 第一個 $\times 3+3^0\times 7$
3. 第三個商者=第二個 $\times 3+7=($第一個$\times 3+7)\times 3+7=$ 第一個 $\times 3^2+(3+1)\times 7=$ 第一個 $\times 3^2+(3^1+3^0)\times 7$
4. 第四個商者=第三個 $\times 3+7=($第二個$\times 3+7)\times 3+7=[($第一個$\times 3+7)\times 3+7]\times 3+7$ $=$ 第一個 $\times 3^3+(3^2+3^1+3^0)\times 7$
5. 第五個商者=第四個 $\times 3+7=($第三個$\times 3+7)\times 3+7=[($第二個$\times 3+7)\times 3+7]\times 3+7$ $=\{[$第一個$\times 3+7)\times 3+7)\times 3+7\}\times 3+7=$ 第一個 $\times 3^4+(3^3+3^2+3^1+3^0)\times 7$。

所以各商之循環節數字和為第D 商者,$D\geq 1$, 則其和 $=1\times 3^{D-1}+7\times(3^{D-2}+3^{D-3}+\cdots+3^0)$ 。

[3] 將各循環節數字和找出, 若其和不是一位數, 再相加找出此和之數字和, 一直到和為一位數止, 則它們最終的值均是1, 而其前一個值均為10, 請看

		1
		$1+0=1$
	$3+7=10$	$1+0=1$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=37$	$3+7=10$	$1+0=1$
118	$1+1+8=10$	$1+0=1$
361	$3+6+1=10$	$1+0=1$

妙哉! 妙哉! 夫復何言! 有系統、有條理, 數學美且易。

研究至此, 我們已獲得的結論有:

1. 費曼怪數是一純循環小數, 循環節有27位數, 將其九等分, 則前八等分為一等差數列, 公差為111, 但最後之第八間隔的差值為112。
2. $\frac{1}{3^A}$ 而 $A\geq 2$ 時, 則循環節為由 3^{A-2} 位數所組成, 此 3^{A-2} 位數, 均不能被3除盡, 且餘數均相同為1。
3. $\frac{1}{3^B}$ 而 $B\geq 4$ 時, 若將其循環數字九等分, 則每等分之位數為 3^{B-4}, 且其前八份為一等差數列, 公差為 3^{B-4} 個1所組成, 而最一個差值, 僅是個位數改成2而已, 此乃因為發生進位效應。
4. $\frac{1}{3^A}$ 而 $A\geq 2$ 時, 其各循環節數字總和有下列關係。
   甲: 各個循環節數字和+ 除數=後一個循環節數字和, 其第C 商之循環節數字和 $=1+(3^2+3^3+\cdots+3^C)$。
   乙: 前一數字 $\times 3+7=$ 後一數字。其第D 商之循環節數字和 $=1\times 3^{D-1}+7\times(3^{D-2}+3^{D-3}+\cdots+3^0)$。

丙: 各循環節數字和之和, 一直到和爲一位數止, 它們最終的值均是1, 而其前一個值均爲10。

大家都知道, 利用有限資料歸納所得到的規律, 如果應用“內插法”去推論其他狀況下的資料 , 還可以讓人足夠信服的, 但是應用“外推法”時, 則得十分謹慎方是, 物理學上的“虎克定律”就是很淺顯易懂的例子, 在數學史上, 有名的例子就是所謂的費馬數 (Fermat Number)(註四), 因此觀察幾個例子所得規律, 只能說是猜測而非定律, 數學不僅僅在歸納觀察的結果成爲規律, 更重要的是說明“爲什麼”, 此即證明歸納的規律使之爲“定理”。接下來我們就是從事這方面的工作。

$$\frac{1}{243}=0.\overline{004115226337448559670781893},$$

我們可將此循環小數寫成

$$0.004004004\cdots+0.000,\overline{111}+0.000,000,\overline{111}+0.000,000,000,\overline{111}+\cdots$$

因爲 $\frac{1}{9}=0.\overline{1}$, 所以 $0.000\overline{111}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{10^3}$, $0.000,000,\overline{111}=\frac{1}{9}\times(\frac{1}{100})^2,\cdots$ 此即 $0.\overline{004}+[\frac{1}{9}\times\frac{1}{1000}+\frac{1}{9}\times(\frac{1}{1000})^2+\frac{1}{9}\times(\frac{1}{1000}^3)+\cdots]$, 後面的 [ ]乃一幾何級數, 公比 $=\frac{1}{1000}$, 而 $0.\overline{004}=4\times\frac{1}{1000}+4\times(\frac{1}{1000})^2+4\times(\frac{1}{1000})^3+\cdots$, 也是一幾何級數, 公比也是 $\frac{1}{1000}$, 所以

$$0.\overline{004}=\frac{\frac{4}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{4}{999},\qquad [\quad]=\frac{\frac{1}{9}\times\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1}{9\times 999}$$

將兩者相加 $\frac{4}{999}+\frac{1}{9\times999}=\frac{36+1}{81\times111}=\frac{37}{81\times111}=\frac{1}{81\times3}=\frac{1}{243}$ 此乃原來的 $\frac{1}{243}$, 證明費曼怪數以無限來看, 公差=111, 沒錯的! 結論: 沒有功虧一簣之憾也。

又因爲 $3\times37=111$, 我們可作更進一步的觀察:

$$\begin{aligned}\frac{1}{243}&=\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^4\times3}=\frac{37}{3^4\times111}=\frac{\frac{36+1}{3^2\times1000}}{\frac{3^2\times111}{1000}}=\frac{\frac{36+1}{9000}}{\frac{999}{1000}}=\frac{\frac{4}{1000}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{0.004}{1-\frac{1}{1000}}+\frac{0.000\overline{1}}{1-\frac{1}{1000}}\\&=0.\overline{004}+0.000,\overline{111}+0.000,000,\overline{111}+0.000,000,000,\overline{111}+\cdots\end{aligned}$$

此即告訴我們: $\frac{1}{243}$ 的小數表示法爲從004開始, 依次加 111 得到下三位數。

同樣的, 我們有 (因爲 $9\times12,345,679=111,111,111$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{729}&=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{3^4\times9}=\frac{12,345,679}{3^4\times111,111,111}=\frac{\frac{12,345,678+1}{3^2\times1,000,000,000}}{\frac{3^2\times111,111,111}{1,000,000,000}}\\&=\frac{\frac{12,345,578}{9\times1,000,000,000}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{1,000,000,000}}{1-\frac{1}{1,000,000,000}}=\frac{1,371,742}{1-\frac{1}{10^9}}+\frac{\frac{1}{9}\times\frac{1}{10^9}}{1-\frac{1}{10^9}}\\&=0.\overline{001,371,742}+0.000,000,000,\overline{111,111,111}\\&\quad+0.000,000,000,000,000,000,\overline{111,111,111}+\cdots\end{aligned}$$

此即告訴我們: $\frac{1}{729}$ 的小數表示為從 $001,371,742$ 開始, 依次加 $111,111,111$ 得到下九數, 而九次後循環, 所以 $\frac{1}{729}$ 的循環節為一81位數。

依次, 下一個當是從 27 個 1 開始 $111,111,111,111,111,111,111,111,111 = 9\times 12,345,679,012,345,679,012,345,679 = 27\times 4,115,226,337,448,559,670,781,893$ 而 $\frac{1}{3^7}$ 的循環小數表示法為從 $000,457,247,370,827,617,741,197,988$ 開始, 依次加27個1, 八次後合起來就是其243位的循環節。

最後, 我們要探究下列兩項歸納心得, 彼此間的因果關係

甲: 各循環節數字和+除數=後一個循環節數字和

乙: 前一數字 $\times 3+7=$ 後一數字, 參考數列為 $1, 10, 37, 118, 361, \cdots$。

首先由甲, 我們已經找出其第 C 商的循環節數字為: 第 C 商者 $1+(3^2+3^3+\cdots+\cdots+3^C)$, 現在我們將它改寫成: 第 C 商者 $=(3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^C)-3$, 所以除去最後一項, 則前面為等比級數, 公比=3, 因此利用有限等比級數和公式, 可得:

$$\text{第 } C \text{ 商者} = \frac{3^{C+1}-1}{2}-3 \tag{1}$$

$$\text{第 } (C+1) \text{ 商者} = \frac{3^{C+2}-1}{2}-3 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\text{則 } (2)\text{-}(1)\times 3 &= (\frac{3^{C+2}-1}{2}-3)-(\frac{3^{C+1}-1}{2}-3)\times 3\\ &= \frac{3^{C+2}}{2}-\frac{1}{2}-3-\frac{3\times 3^{C+1}}{2}+\frac{3}{2}+9=7\end{aligned}$$

即第 C 商者 $\times 3+7=$ 第 $(C+1)$ 商者

前一數字 $\times 3+7=$ 後一數字, 這不就是乙項的結果嗎！

若先由乙, 我們已經找出: 第 D 商者 $=1\times 3^{D-1}+7\times(3^{D-2}+3^{D-3}+\cdots+3^0)$。現在我們將它改寫成: 第 D 商者 $=7\times 3^{D-1}-6\times 3^{D-1}+7\times(3^{D-2}+3^{D-3}+\cdots+3^0)=7(3^{D-1}+3^{D-2}+\cdots+3^0)-6\times 3^{D-1}$, 也是除去最後一項, 則前面為比級數, 公比=3, 因此還是利用有限等比級數和公式, 可得

$$\text{第 } D \text{ 商者} = 7\times(\frac{3^D-1}{2})-6\times 3^{D-1} \tag{1}$$

$$\text{即第}(D+1) \text{ 商者} = 7\times(\frac{3^{D+1}-1}{2})-6\times 3^D \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\text{則 } (2)-(1) &= [7\times(\frac{3^{D+1}-1}{2})-6\times 3^D][7\times(\frac{3^D-1}{2}-6\times 3^{D-1}]\\ &= \frac{7}{2}\times 3^{D+1}-\frac{7}{2}-6\times 3^D-\frac{7}{2}\times 3^D+\frac{7}{2}+6^{D-1}\times 3^{D-1}\\ &= \frac{7}{2}\times 3^{D-1}-\frac{19}{2}\times 3^D+6\times 3^{D-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{2} \times 3^{D+1} - \frac{19}{6} \times 3^{D+1} + \frac{6}{9} \times 3^{D+1}$$
$$= (\frac{7}{2} - \frac{19}{6} + \frac{6}{9}) \times 3^{D+1} = 3^{D+1}$$

即第 $(D+1)$ 商者 $= 3^{D+1}+$ 第 D 商者=除數+ 第 D 商者, 後一循環節數字和=除數十前一個循環節數字和, 此即爲甲項的結果。

心得: 數學不僅僅在歸納, 更要說明“爲什麼”, 從而證明歸納的心得, 使之成爲定理。

註一: $\frac{1}{81} = \frac{0.\overline{037}}{3}$, 037不能被除盡, 所以需要三個037, 所以 $\frac{1}{81} = \frac{0.\overline{037037037}}{3} = 0.\overline{012,345,679}$, 也可以寫成 $\frac{1}{81} = \frac{\frac{1}{9}}{9} = \frac{0.\overline{1}}{9}$, 因爲一個整數被9除盡的條件是各位數總和可被9除盡(與被三除盡的條件類似), 所以我們需要九個1即111,111,111才能除盡9, 所以 $\frac{1}{81} = \frac{0.\overline{111,111,111}}{9} = 0.\overline{012,345,679}$。

註二: 費曼怪數 $\frac{1}{243}$, 原來的數是無限循環小數, 因爲循環, 我們將循環節抽出做的觀察, 是用有限來代替無限, 因此才有第八間隔的差値112, 而非公差111的奇特現象, 但這只是一個表相而已, 如果回歸原來的無限, 從004開始, 依次加111, 可得

$$004, 115, 226, 337, 448, 559, 66(10) = 670, 77(11) = 781,$$
$$88(12) = 892, \quad 99(13) = 1003, \quad (10)(10)(14) = 1114, \cdots\cdots,$$

進位892變成893　　進位前數變成004

換言之, 費曼怪數實際上公差是111沒錯, 此爲眞相。

註三: “前一數字 $\times 3 + 7 =$ 後一數字”是天注定要由中國人發現的規律, 因爲不論用國、台、客粵語去唸數列中的前三個數中的第二, 第三個,10,37, 不就很淸楚顯現此一規律了。

註四: 費馬認爲 $2^{2^A} + 1$, $A \geq 0$, $A \in$ 整數可能都是質數, 其前五個爲3;5;17;257;65,537均符合, 但1732年尤拉發現第六個 $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$ 是一合成數, 至今還未有任何其他的費馬質數被發現。

最最後, 特別感謝中研院數研所教授的指導, 觀念更正確, 研究更能紮實, 同時, 有幸能體會“入乎其內, 出乎其外”之數學方法。

參考資料

1. 數學萬花筒 1,2,3 —九鼎出版社, 民國75年3月。
2. 怎樣解題 —(美)G. 波利亞著, 九章出版社. 78. 8。
3. 數學發現 —(美)G. 波利亞著, 九章出版社. 78. 8。
4. 數學與猜想 —(美)G. 波利亞著, 九章出版社. 81. 2。

—本文作者任教於高市光榮國小—