數學教學中加強師生思維的共振

何昌俊

課堂教學是以教師爲主導, 學生爲主體, 訓練爲主線的三大循環系統。優良的訓練主線體現主導與主體思維的共振。即教師要做到體察“民情”(學生)。因爲教師具有雙重任務, 一方面主導是“教”的任務, 成爲學生學習的導向人; 另一方面, 教師以學生的年齡特徵、數學結構、主觀感知等問題, 以及想什麼? 做什麼? 如何“活動”爲前提, 以學生的思維角度去考慮新內容, 擔任“學”的任務, 和學生一道成爲新知識、新能力的探索者。所以, 在課堂上, 教師要把主導與主體集於一身, 靈活轉換, 使之二者思維共振, 產生共振效應, 使學生的知識與能力和諧地發展。師生的思維共振的能力是教師能力的重要標誌之一。

筆者就師生思維共振問題作初步探討。

一. 想學生之所想

想學生之所想, 能激起學生與教師思維共振, 縮短師生心理上之間的距離。當學生聽課時, 由於主、客觀原因, 未能暴露自己的想法時, 則需教師洞察學生的心理, 及時探測和巧妙地點出他們之所想, 使之師生之間心理得到溝通。

比如: 在講二次根式的加減法

$$\begin{aligned}&2\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{y}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x}\\=&(2+\frac{1}{2}-1)\sqrt{x}+(1-\frac{1}{3})\sqrt{y}\\=&\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{y}。\end{aligned}$$

學生易聯想到多項式運算中的“合併同類項”。教師利用這一良機, 啓發學生將上述運算命名爲“合併同類二次根式”。再如: 講分式基本性質, 利用分數基本性質。講複數除法運算時, 利用根式分母有理化, 命名爲分母實數化等等。寥寥數語, 揭示知識的內在聯繫, 同時也進行了如何探索新知識的方法的訓練。

再如: 解方程組

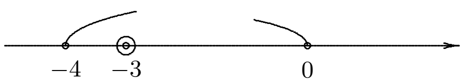
$$\begin{cases}\frac{36-y}{x}+\frac{y}{x+6}=2\frac{2}{3}\\ \frac{y}{x}+\frac{36-y}{x+6}=2\frac{1}{3}\end{cases}$$

運算過程比較繁瑣, 此時我扮演起學生的角色, 以不耐煩的口氣說: “唉! 運算這麼麻煩, 乾脆都別做了!” 這時, 學生反而堅定信心做下去。即產生了“自己人效應–要使對方接受你的觀點、態度、你就必須同對方保持“同體”的關係。”

二. 思學生之所難

教師若是就題論題, 就知識論知識, 學生成了“觀衆”, 那麼教師主導, 學生主體就沒協同好, 訓練主線也無最佳體現。也就達不到教師、學生思維的共振。因此, 教師要深入學生、了解學生、扮演學生的角色, 成爲學生的化身, 才能體察學生的困難之所在, 才能化難爲易。

如講函數自變量的取値範圍, $y = \frac{1}{x+3}+\sqrt{-x}+\sqrt{x+4}$。把函數分解爲下列三個函數 $y_1=\frac{1}{x+3}$ 且 $x\neq -3$; $y_2=\sqrt{-x}$, 且 $x\le 0$; $y_3=\sqrt{x+4}$ 且 $x\ge -4$。然後在同一數軸上表示出來



此時眞相大白 (隨之培養學生數形結合思想)。自變量取値範圍爲 $-4\le x\le 0$ 且 $x\neq -3$。

再如講不等式組

$$\begin{cases} x>a \\ x>b \quad (a<b) \end{cases}$$

時, 可取公共部分。爲加深理解, 讓一高一矮兩名學生過教室門口, 問學生:“要是不低頭通過, 教室門框應該多高?” 學生易知:“比高的學生還要高!” 這一簡單可又難講的道理。

再如講如何證明幾何問題時, 可以利用最古老的人們最熟悉的三角形面積爲橋樑, 去證明, 思路直觀又避免一些較難想的輔助線, 學生一旦掌握利用三角形面積公式去證明幾何題的思想 (用不同形式表示同一個三角形的面積, 得到一個等式, 再進一步推出其結論), 對證明幾何題就不會望而生畏, 會更親切! (如1993年廣東省中考題) 已知: 如圖1, $\triangle ABC$ 內接於圓 O, BN、CM 是圓的切線, 切點分別爲 B、C, $AE//BN, AD//CM$。

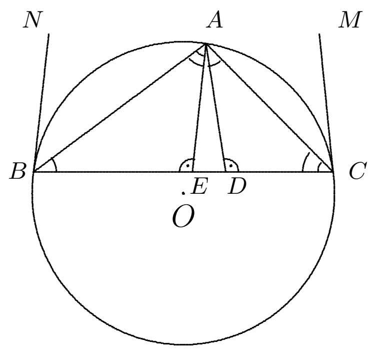


圖 1

求證: 1. $\overline{AD}^2=BE\cdot CD$,
2. $BE:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$。

略證:

$$1.\ \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac12 BE\cdot AB\cdot\sin\angle ABE}{\frac12 AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD}=\frac{\frac12 AB\cdot AE\cdot\sin\angle BAE}{\frac12 AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{AD}=\frac{AE}{CD}; \tag{1}$$

$$\angle AED=\angle ADE\Rightarrow AE=AD \tag{2}$$

由 (1) 及 (2)

$$\Rightarrow \overline{AD}^2=BE\cdot CD。$$

2. $$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot BE\cdot\sin\angle AEB}{\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin\angle ADC}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AE\cdot\sin\angle BAE}{\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABE}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC}$$
$$\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{AE}{DC}=\frac{AB}{AC}\\ \frac{BE}{DA}=\frac{AB}{AC}\end{array}\right.$$
且 $AE=AD$
$$\Rightarrow\quad BE:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2。$$

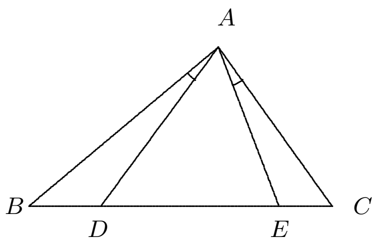


圖 2

(1986年上海市競賽題) 如圖 2, 在 $\triangle ABC$ 中, D、E 是 BC 邊上兩點, 且 $\angle BAD=\angle CAE$。

求證: $\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$。

略證: 由 $\triangle ABD$ 與 $\triangle AEC$, $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADC$ 等高, 則

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{BD}{EC}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AE\cdot AC\cdot\sin\angle EAC}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AE}=\frac{BD}{CE}\qquad(3)$$
$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BE}{CD}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AE\sin\angle BAE}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle DAC}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}=\frac{BE}{CD}\qquad(4)$$

由 (3), (4)

$$\Rightarrow\ \frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}。$$

蝴蝶定理: 設圓內的紘 MN 之中點爲 P, 過 P 任作兩紘 AB、CD, 連 AC、BD 分別交 MN 與 E、F。

求證: $PE=PF$。如圖3。

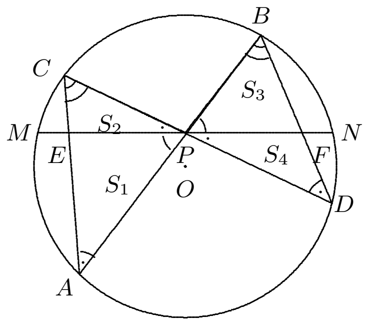


圖 3

略證: 由於 $\frac{S_1}{S_4}\cdot\frac{S_4}{S_2}\cdot\frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_1}=1$, 則

$$\frac{AE\cdot AP}{DP\cdot DF}\cdot\frac{DP\cdot PF}{PE\cdot PC}\cdot\frac{CE\cdot CP}{BP\cdot BF}\cdot\frac{BP\cdot PF}{AP\cdot PE}$$
$$=1$$
$$\Rightarrow\frac{\overline{PF}^2}{\overline{PE}^2}\cdot\frac{AE\cdot EC}{DF\cdot FB}=1$$
$$\Rightarrow\frac{\overline{PF}^2}{\overline{PE}^2}\cdot\frac{ME\cdot EN}{FN\cdot MF}=1$$
$$\Rightarrow\frac{\overline{PF}^2}{\overline{PE}^2}\cdot\frac{(MP-PE)(PE+MP)}{(MP-PF)(PM+PF)}=1$$
$$\Rightarrow\frac{\overline{PM}^2\cdot\overline{PF}^2}{\overline{PM}^2\cdot\overline{PE}^2}=1$$
$$\Rightarrow PE=PF。$$

這樣, 具有直觀性, 通用性和簡潔性。猶如列

方程解應題一樣, 是一種天塹變通途的思維方式。

三. 析學生之所疑

對學生的疑, 若不及時排除, 必造成學生心理上的不和諧, 成爲學習的障礙。學生的疑往往是朦朧的難以言表的, 這便說明教師析學生之所疑的重要性。如已知 $m > n > 1$, $0 < a < 1$, 下列不等式中正確的是 ( )。$(A)m^a < n^a$, (B) $\log_a m > \log_a n$, (C) $a^m > a^n$, (D) $\log_m a < \log_n a$。

該選支形式各不相同, 涉及到冪函數, 對數函數, 指數函數的性質, 顯然錯綜複雜。學生要進行觀察、比較、探索、篩選、辨析、歸納、判斷得出結論。這種心理活動處於緊張激動之中, 有的僅一念之差, 而使全局皆錯。這種局面在學生心理上會產生一種恐懼感, 造成大腦皮層抑制而使思維不能展開, 覺得無從下手, 若消除這種障礙, 教師要排學生之所疑。根據冪、對、指數函數的性質, 借助圖象或用特殊值法 (賦值法), 將會使問題順利解決。只須取 $m = 4, n = 2, a = \frac{1}{2}$ 代入選支, 故選 (C)。此時學生疑竇頓消, 感到這種方法竟是如此平易近人。

四. 嘗學生之所錯

教師預測學生易出錯之處, 可故意嘗學生之所錯, 可避免以後的錯。

例如: 設 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三條高。求證: $AD \cdot BC = BE \cdot CA = CF \cdot AB$。學生幾乎是只考慮銳角三角形一種情形。教師也可順其所錯, 同學生共同嘗誤。然後經過一番探討之後, 還有鈍角三角形、直角三角形兩種情形。這樣學生頭腦中會留下深刻印象, 從而培養了學生思維的完備性。

再如畫函數 $y = (x-5)^2 + 6$ 的圖象。

教師認眞在黑板右上角, 畫出直角坐標系, 則拋物線頂點坐標 (5,6) 擠到黑板右上角, 拋物線頂點右半部分已“無容身之地”了, 此時處窘迫之境地。這樣能使學生會深刻領會到畫圖象布局合理的重要性。增強了學生預見之意識。

“預測之錯”乃是教師在教學中不可缺少的方法之一。

五. 享學生之所樂

課堂是師生共同表演的舞台, 成熟的教師主導的導向, 應從學生思維角度出發, 使學生情不自禁的參與這種表演中來, 使他們感到喜滋不盡, 樂滋有餘, 始終樂在其中。

比如講向量加法時。對於 $\triangle ABC$ 在平面幾何中有 $AB + BC > AC$, 而向量加法, 卻是 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$。教師可說:“啊呀! 怎麼搞的? 三角形的兩邊之和怎麼等於第三邊呢?” 這一詰問, 學生情趣被激起, 在興奮歡樂中對知識的內涵得以進一步認識。

再如學習立體幾何大障礙是識圖和作圖, 如把空間圖形畫在平面所產生的“失眞”現象, 學生會產生視覺誤差, 教師可巧妙利用視覺誤差讓學生感到妙趣橫生。教師可說:“電視螢光屏上走動的人, 你能摸到人的五官嗎? ” 再如“相機照出的相片”等。學生會大笑。從心理上縮短了立體與平面的直觀圖的距離。

六. 憶學生之所忘

留心的教師常常有這樣一種心理體驗, 即在用到某些知識點或某些方法或某種數學思想解決問題時, 忽然間明明熟悉的卻變得模糊起來。這是典型思維共振現象。這種現象提醒了我們, 學生的遺忘一定比教師更嚴重。教師必須以學生的身份出現和他們一起去回憶、聯想、推導、論證, 從而戰勝遺忘, 達到更好的鞏固知識之目的。

如三角公式“積化和差”不好記, 易忘, 可和同學們一起從兩個角和、差三角公式去推導, 使知識形成過程再現, 加強了記憶。

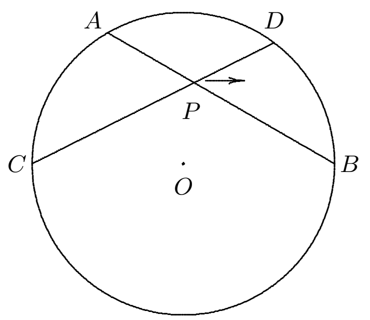


圖 4

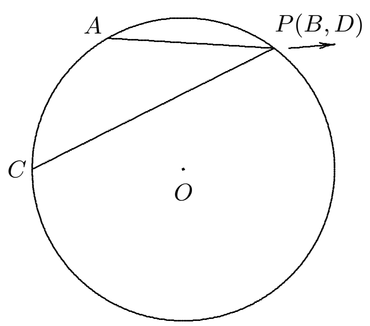


圖 5

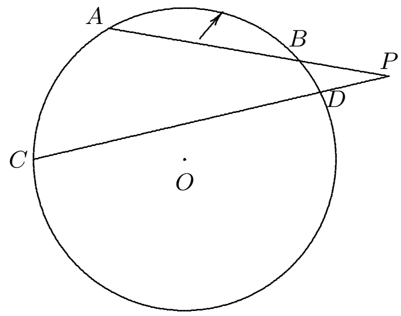


圖 6

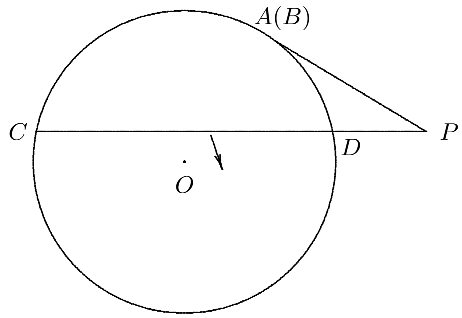


圖 7

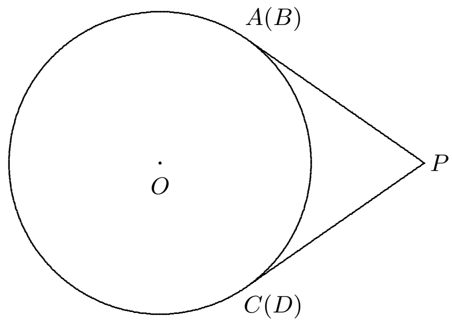


圖 8

再如圓冪定理, 可運用運動觀點去揭示知識之間的內在聯繫, 使之記憶加深。如圖 4, P 是圓 O 內一點, 過 P 作兩條絃 AB、CD, 則 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。當 P 點運動到

圓周上, P、B、D 三點重合如圖5, 上式成立。當 P 點運動到圓外, 如圖6, 則 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$。當 PBA 繞 P 點順時針旋轉到 A、B 重合, 如圖7, 則 $\overline{PA}^2=PC\cdot PD$。當 PDC 繞 P 點逆時針旋轉到 C、D 重合, 如圖8, 則 $PA=PC$。這樣通過運動把圓冪定理聯繫和統一起來。

七. 消學生之所惡

教師本身應具有靈活的思維能力和較強的教學機智, 應具有靈活應變能力, 同時也要發現學生活躍的思維的火花。教師在教學中若出現"偏差", 應勇於承認, 坦誠對待。而不要固執己見, 強詞奪理, 這也正是學生所厭惡的, 應誠懇的面對這一 (偏差) 現實。當學生對某一問題有獨到見解時, 教師應給以承認, 給以高度評價。這一閃光點也許會成爲學生學好數學, 甚至成爲數學家的動力。

八. 除學生之所擾

學生解題時, 有時會因不嚴密的初試"成功"引起過度興奮干擾, 形成輕視心理, 不進一步探查, 造成失誤。

如方程 $(m^2-1)x^2+2(m-1)x+2=0$ 有實數根, 則 m 的取值範圍爲 ( )。(A) $-3\le m\le 1$, (B) $-3<m\le 1$, (C) $-3\le m<1$, (D) $-3\le m<1$, 且 $m\neq -1$。錯解: 不考慮一次方程情形, 選 (D)。但 (C) 正確。

有時還會受以前做過或見過的相似題的干擾, 產生思維定勢而失誤。

如圓錐曲線的一個焦點爲 $F(\frac{p}{2},0)$, 對應準線爲 $x=-\frac{p}{2}$, 則曲線是 ( )。(A) 橢圓, (B) 拋物線, (C) 雙曲線, (D) 不確定。

稍不細心就會選 (B), 這是受拋物線的焦點與相應準線的標準形式的負遷移而引起思維定勢而產生失誤, 正確的選 (D)。

因此, 教師要站在學生角度去審視問題, 對干擾要及時排除。

總之, 古人云:"先天下之憂而憂, 後天下之樂而樂。" 作爲當代教師, 應該具備這個品質, 做到體察"民情"(學生), 處處想學生之所想, 幫學生之需, 才能眞正做到師生思維共振。只有這樣, 才能做好教學工作。

—本文作者任職於黑龍江省七台河市第二中學—