談數學教學設計中對教材的分析

喻平

教材分析是教學設計的重要環節。本文根據數學教材的特點, 從表層和深層對數學教材的結構分析方法進行探討。

一、表層結構體係分析

將教材中的概念、公理、定義、定理、公式、法則等稱爲知識點。顯然, 每章每節乃至整個課本中的某些知識點之間, 必然存在某種關係, 這種關係體現爲數學上的抽象關係 [1]。即知識點之間可能存在強抽象、弱抽象和廣義抽象關係。設 A, B 是兩個知識點, 如果 B 是 A 的特例, 則稱謂 A 到 B 的抽象是強抽象; 如果 A 是 B 的特例, 則稱 A 到 B 的抽象是弱抽象; 如果定義 B 時用到了 A , 則稱 A 到 B 的抽象是廣義抽象。

把每個知識點在平面上分別用一個點表示, 如果知識點之間存在上述的三種關係之一, 就使用一條有向線段將兩點連結, 這樣便得到一個有向圖, 這個有向圖給我們提供了三種信息 [2]。

1. 知識網的連通度

去掉所得有向圖中的線段方向, 祇考慮知識點以及連結知識點之間的線段, 稱這樣的圖爲知識網。如果一個知識網中的每個知識點之間都存在至少一條通往兩點的“路”, 則稱這個知識網是連通的。知識網的連通度是指去掉某些知識點, 從而使該知識網不連通的所需去掉的最少點數。

顯然, 如果知識網是不連通的, 那麼某些知識點或者可能是孤立的, 或者是大知識網中的某些小知識網之間沒有連結關系, 這種不連通的知識網不利於學生學習新知識點時的概念同化, 更重要的是還會增加學生的記憶負擔, 形成學生不完整的認知結構。反之, 如果知識網的連通度高, 那麼去掉一定量的知識點數, 並不影響知識網的連通性, 因而, 有一定連通度的知識網, 是一種較佳的教材體係。

基於此, 在分析教材時, 應注意兩個問題。首先, 要重視對度數大的知識點的教學處理, 所謂度數是指該知識點連結其它知識點的邊數。度數大的知識點表明它與衆多知識點有關, 同時, 如果去掉這些知識點, 就會造成知識網不連通, 因此, 這樣的知識點就自然

形成爲教學中的難點和重點。譬如, 直線的一般式方程與點斜式、兩點式、斜截式及截距式方程均有聯繫, 因此直線的一般式方程便是一個度數大的知識點。又如橢圓、雙曲線和拋物線是通過它們的統一方程這個度數大的概念使其聯繫起來的。實踐證明, 度數大的概念往往是學生學習中的困難之處。

其次, 必須注意例、習題的處理。例、習題的一個功能乃是它們能夠起到增加知識網連通度的作用。安排一定數量的例、習題, 往往會使彼此似乎無關的知識點, 或者使兩個彼此不連通的知識網連結起來, 因而可以說, 例、習題的數量在一定程度上是使知識網連通所需要的最少知識點的數目。在分析教材時, 可以通過對知識網圖的觀察, 在適當的地方配以適當的例、習題, 包括搭配除教材中已有例、習題之外的題目, 從而使教材趨於合理。

2. 知識網的抽象度

當考慮知識網中連結知識點的線段具有方向性時, 知識網就是一個有向圖, 該有向圖具體反映了各知識點之間的數學抽象關係。

如果知識點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之間存在關係 $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n$, 則稱 A_1 與 A_n 之間有一條路, 該路中有向線段的數目稱爲路長, 同時定義路長爲 A_n 相對於 A_1 的抽象度, 記爲 $d(A_n|A_1)$, 即 $d(A_n|A_1)=n-1$。當連結 A_1 與 A_n 的路多於一條時, 取所有路中的最長者爲 A_n 對於 A_1 的抽象度。從知識點 A 爲起點的有向線段的條數叫做 A 的出度, 記爲 $d^+(A)$; 以知識點 A 爲終點的有向線段的條數叫做 A 的入度, 記爲 $d^-(A)$。於是, 通過對知識網這個有向圖的分析, 可以得到一個三元指標 $\{d(A_i|A_j), d^+(A_i), d^-(A_i)\}$, 而此三元指標依次刻畫了各知識點在知識網中的深刻性程度、基本性程度和重要性程度。因此, 通過對知識網的抽象度分析, 可以爲各個知識點在教材中所占位置的權重提供數據, 使之在具體的教學中做到有的放矢。

在進行知識網的抽象度分析時, 應注意三個問題。一是抽象難度難以在有向圖中體現出來。譬如 A_1 相對於 B_1 的抽象度爲5, A_2 相對於 B_2 的抽象度爲5, 兩者的抽象度相同, 但 A_1 相對於 B_1 的難度則不一定與 A_2 相對於 B_2 的難度相同, 這是由於 B_1、B_2 各自的難度起點不一定相同, 而且每級抽象的難度也有差異。一般說來, 每步抽象的難易程度是不易確定的, 要靠大量的教學實踐經驗總結, 或通過大批學習者測定他們掌握各步抽象概念所花費的平均小時數來衡量難易程度。第二點應考慮知識網所成的有向圖中, 強抽象與弱抽象形式的搭配比例問題。因爲知識點之間的強抽象關係所對應的學習形式是下位學習, 而下位習容易實現概念同化。所以數學教材的結構多是以強抽象的形式進行編排的。但是, 如果過多地偏重某一種抽象形式而忽視其他抽象形式, 那麼勢必會使學生養成一種單一的思維模式, 不利於學生思維能力的培養。因而, 在教學設計時應補充一定的內容, 甚至可以交換教材中某些知識點的呈現順序, 使得增加一些弱抽象關係。第三點是應特別注意對原始概念、入度大的概念及

多重廣義抽象概念的教學處理, 關於這一點, 參閱 [3]。

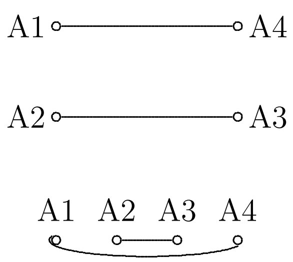
3. 知識點的重現度

知識網所對應的是平面上的有向圖, 作爲教學過程的實施, 不可能將平面圖中的所有知識點一次性地同時呈現給學生, 而只能按先後秩序分別呈現各知識點, 這種先後呈現秩序同時受到知點之間的邏輯關係和學生學習心理、接受能力雙重因素的制約。

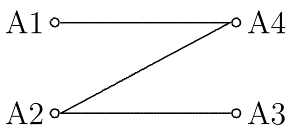
在教學過程中這種按一定順序先後呈現各知識點的方式, 實質上是將知識網中的知識點依次放在一條直線上, 按從左到右的形式依次呈現各知識點。這種“依次”的具體實施可採用標號的方法進行, 即將知識網中各知識點用數字 $1, 2, \cdots n$ 標號。然後再按數字大小由小到大地將各知識點放入直線上。因此, 問題的實質是如何標號, 才能使各知識點的呈現順序最佳。

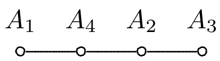
設 A_1, A_n 是放在直線上的兩個知識點, A_1, A_n 間存在數學抽象關係, 在 A_1 與 A_n 之間存在 $n-2$ 個知識點, 我們稱 $R(A_1, A_n) = n-1$ 爲 A_1 對 A_n 的重現度 (注意與 A_n 對 A_1 的抽象度概念不同, 因爲 A_1 與 A_n 之間的某些知識點之間可以不存在抽象關係)。顯然, 如果 A_1 對 A_n 的重現度大, 表明 A_1 與 A_n 之間間隔的知識點就多, 而學習 A_n 時又必須要用到 A_1 , 由於遺忘等因素, 使得對於學習 A_n 是不利的。因此, 希望 A_1 和 A_n 之間的知識點個數儘量少些, 但是 A_1 或 A_n 本身又可能與另外的知識點有抽象關係, 比如 A_1 與 A_i 有抽象關係, 這時雖然可以減小 A_1 對 A_n 的重現度。但又可能增大 A_1 對 A_i 的重現度。基於此, 考慮求知識網中所有知識點之間的重現度之和最小, 再按照這種最小的要求去給知識網圖標號, 由此得到的排序順序應該是最佳的。這個問題抽象爲純數學問題來看, 就是如何用數字 $1, 2, \cdots, n$ 給有 n 個頂點的圖標號, 再按標號順序將這些點放入一直線上, 使其 $\Sigma R(A_i, A_j)$ 最小。這是一個圖標號問題, 對一般圖是很難進行標號的 [4]。但由於知識網圖往往較簡單, 因此按上述要求的標號可以做到, 下面舉一例說明。

選取 1978 年版全日制十年制初中課本數學第二冊的因式分解單元。令 A_1: 提取公因式法; A_2: 應用公式法; A_3: 可化爲 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三項式因式分解; A_4: 分組分解法。課本上的知識網圖及呈現順序如下:



分析上述圖, 發現存在兩個問題。第一, 知識網不是連通的, 內容聯繫不緊密; 第二, 因爲 $R(A_1, A_4) = 3$,$R(A_2, A_3) = 1$, 所以所有知識點的重現度之和爲 4, 這不是一個最佳排序, 因此, 現作兩點改進, 將 A_2 與 A_4 連結, 再重新排序, 得





有 $R(A_1, A_4) = R(A_4, A_2) = R(A_2, A_3) = 1$, 所以重現度之和爲 3。實踐證明, 後一種排序的教學效果優於前一種排序的教學效果 [5]。

應當指出的是, 如果知識點 A 到 B 是廣義抽象關係, 則在排序時, B 祇能在 A 的後面, 這是由於在定義 B 時必須用到 A 。

二、深層次結構分析

教材中的深層次結構指不是以外顯的文字形式在課本上出現, 而是隱含於各知識點、知識網中的潛在內容, 包括各種隱含關係, 數學思想、數學方法、邏輯知識等等。這些內容, 對於培養學生的能力, 發展學生的思維都是十分有用的, 因而數學教師在進行教學設計時, 必須認眞和仔細地去挖掘這些內容。

上面我們探討了教材的表層結構分析, 所提供的參數是具體的, 可操作的, 但對於教材的深層分析, 就很難做到這一點。下面從四個方面作一討論。

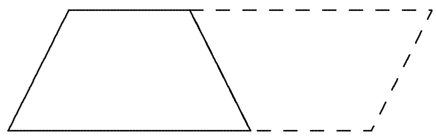
1. 隱含關係的挖掘

知識點或知識網之間, 除了有數學抽象的三種關係以外, 有時還可能存在另一些隱蔽的潛在的關係。譬如, 解方程和解不等式是兩個彼此獨立的知識網, 但比較兩者可以看出它們的操作程序是相同的。這種相同的操作程序就是兩個知識網的潛在關係, 在教學中, 若教師能揭示這種關係, 則不僅能使學生在學習新概念時能充分利用舊概念進行同化, 收到較好的教學效果, 而且無形中培養了學生觀察問題、分析解決問題的能力。

一般說來, 可利用相似原理去發現教材中的隱含關係, 包括結構相似、圖形相似、關係相似、方法相似等等。下面舉一例說明。

關於等差數列的求和公式推導, 教材中往往是以堆放在地上, 呈現爲梯形狀的鋼管, 欲求其鋼管數目入手進行的 (如圖), 從這裡通過圖形觀察, 發現它與梯形相似 (圖形相似), 進而觀察等差數列的求和公式, 它恰好與梯形的面積公式相似 (結構相似), 因此在教學設計時, 便可考慮用梯形的知識以及解決梯形面積的方法去處理等差數列求和公式的推導。事實上, 在這堆鋼管旁邊倒放同樣的一堆鋼管, 立即得

$$S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n) \cdot n$$



這樣, 就建立了等差數列求和公式的一個幾何模型, 不僅使公式推導簡單, 而且公式可以與梯形面積公式對照, 便於記憶。更深層次地看, 這個過程還揭示了無限 (面積) 與有限 (鋼管數) 之間的辯證關係。

2. 加密或延拓知識網

所謂加密知識網，就是指用例題、習題或者是添加一些必要的知識點，去溝通某些知識點之間的聯繫，增多原知識網中的連線數目，從而也就增大了原知識網的連通度。例如，要求函數 $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{2}+\frac{2}{\sin\theta} \quad (0<\theta<\pi)$ 的最值，可以將 $f(\theta)$ 變形

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta}{2}+\frac{2}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-(-4)}{2\sin\theta-0}$$

從而與解析幾何中的直線斜率公式聯繫起來，即該式爲動點 $P(2\sin\theta,\sin^2\theta)$ 到定點 $Q(0,-4)$ 連線的斜率，因此可使問題立即得解。通過該例，就找出了一類函數的最值問題與直線斜率之間的關係。再如，將複數的三角式經過變形

$$\begin{aligned}
&\cos n\theta=\frac{1}{2}(z^n+\bar{z}^n),\\
&\sin n\theta=\frac{1}{2i}(z^n-\frac{1}{z^n})\\
&(\text{其中}z=\cos\theta+i\sin\theta,\quad n\in N)。
\end{aligned}$$

便可建立三角與複數的聯繫，將三角計算化爲複數的運算。

教材中某章節乃至整本教材，知識點是有限多的，因此所組成的是一個有限知識網圖，在分教材時，我們有可能對某些知識點向知識網的外部延拓，使知識網相對地變大。譬如，將問題進行特殊化或一般化處理；對數學命題作推廣和引伸等等，都是知識網延拓的具體體現。因爲這種延拓知識網的過程實質就是數學研究的過程，其方法也是數學研究中常用的方法，所以延拓知識網的方法對於培養學生聯想、發現和抽象概括的能力是十分有益的。

3. 揭示數學思想方法

關於在教學中如何在展現知識的同時向學生灌輸和傳授數學思想方法，是近年來數學教育界的熱門話題，已出現了衆多的論著進行了較深入的研究。這裡我們祗想強調如下幾種重要的數學思想，它們更具有一般方法論的意義。

轉化思想：解決問題的過程實際就是將問題不斷轉化的過程，這種轉化在數學中稱爲化歸。化難爲易、化繁爲簡、化未知爲已知等等，化歸幾乎存在於所有的數學問題解決之中。

最優化思想：有兩層涵義，一是指數學本身研究的對象要求的結論具有某種最優的性質（如求最大値、最小値等）；二是指尋求解決問題的最優方法。顯然，前者反映了數學研究的應用價值，後者則體現了問題解決（包括非數學問題）中的一些策略和方法，其中包含著決策、評價等因素。

算法思想：解決一個數學問題，總要擬定一個解答的程序，因而也就包含了算法的思想。解方程（組）、解不等式、微積分運算等都有一定的算法，從而形成了一系列解決各種問題的程序。更進一步看，教材中的各種公式、定理本身就是解決某一類問題程序的壓縮。因此，從一定意義上講，解決數學問題就是利用已有的子程序（定理、公式或是以前已經解決了的問題等），去設計一個新的子程序（解決當前問題）的過程。

概率統計思想：包含著或然與必然的辯證關係，用抽樣研究總體性質的以點帶面方法等。

這幾種數學思想的層次較高, 由它們可以衍生出大量的數學方法, 同時它們又具有一般科學方法論的意義。這些數思想方法對於培養學生的數學意識, 提高數學素質具有十分重要的意義。

4. 重視形式邏輯知識

數學與邏輯學是相互依存、互爲發展的。數學建立起了一個個完整的理論體係, 依賴於邏輯作爲紐帶 (前述的三種數學抽象關係實質也是某種邏輯關係), 反過來, 數學應用於邏輯學中又促進了邏輯學的發展。

應該說, 教材中各個知識點的呈現, 各個數學問題的解決, 都伴隨著邏輯, 因此, 數學與邏輯的密切關係也就決定了數學教學與邏輯教學之間同樣的密切關係。然而, 數學教材引入的邏輯知識往往祇包括命題、推理和證明的概念; 四種命題及其關係; 反證法; 充要條件等這幾種簡單、零碎不成體系的內容, 而實際上, 單從平面幾何來看, 幾乎要直接或間接地應用形式邏輯的全部內容 [6]。因此, 作爲數學教師, 對知識點表層下面的邏輯知識、邏輯體系是應該有充分認識的。在教學設計時, 要考慮到既不能將邏輯知識作爲一門單獨的學科進行系統講授, 又不能過分依賴於靠學生的多次重複訓練去逐步掌握一些形式邏輯知識, 領悟和掌握邏輯方法, 而應以適當方式, 在一定時間對教材中隱含的邏輯知識進行小結, 這樣既可以使學生比較快地接受邏輯知識, 又能回過頭去加深已學概念的理解, 形成概念體系。

以上從四個方面討論了對教材的深層次分析, 當然, 要深入地、全方位地分析教材, 這四點是不夠的。作爲一個數學教師, 要學習一些數學方法論知識, 學習必須的邏輯知識, 還應有一定的科研能力, 包括學科教育的研究能力和學科的理論研究能力, 這樣, 才可能居高臨下, 眞正地駕馭教材。

參考文獻

1. 徐利治, 張鴻慶: 數學抽象度概念與抽象度分析法,「數學研究與評論」,1985,5(4)。
2. 喻平: 數學教材中三個指標的分析探討,「數學教育學報」,1994,3(1)。
3. 喻平: 數學概念學習芻議,「課程 · 教材 · 教法」,1995,4。
4. 喻平: 標號圖的一個參量與排序問題,「廣西師範大學學報」(自科版), 1995,13(1)。
5. 張君達, 郭春彥:「數學教育實驗設計」, 上海教育出版社,1994,12。
6. 鮑瓏: 初中幾何與邏輯思維能力,「課程 · 教材 · 教法」1988,2。

—本文作者任教於中國廣西師範大學—