一個重要的摸球問題及其應用

張德然

摘要: 摸球問題是古典概率中一類重要而常見的問題。文中通過其中一個典型例題解決的多途徑及其不同場合下的應用, 顯示了數學簡明、精巧、協調、廣泛而統一等美的特徵。

關鍵詞: 摸球、概率。

摸球問題是古典概率中一類重要而常見的問題, 由於摸球的方式、球色的搭配及最終考慮的問題不同, 摸球問題的內容可以說是形形色色、千差萬別。本文僅從中選一例。通過對此例的探討可以領略到化簡爲易的簡潔美, 與常規解法迥異的新奇美。啓發人們在數學解題中發現美、創造美, 有助於儘快實現解題目標。同時此例的結果是十分重要的, 值得把它當作一個基本定理看待, 因爲不少問題可歸結爲此例所考慮的情形。

問題: 袋中有 a 個黑球, b 個白球, 它們除顏色不同外, 其它方面沒有差別, 現在把球隨機地一個個摸出來, 求第 k 次摸出的一個球是黑球的概率 $(1\le k\le a+b)$。

此問題我們可以首先用全概率公式來求解。

解: 設 B_i 表示前 $k-1$ 次取球中有 i 次取得黑球, 其餘 $k-1-i$ 次取得白球 $(i=1,2,\cdot,k-1)$, 則

$$P(B_i)=\frac{\binom{k-1}{i}\cdot a(a-1)\cdots(a-i+1)\cdot b(b-1)\cdots[b-(k-1-i)+1]}{(a+b)(a+b-1)\cdots[a+b-(k-1)+1]}$$

這裡應假定 $i\le a$ 且 $k-1-i\le b$; 當 $i>a$ 或 $k-1-i>b$ 時, $P(B_i)=0$。

再設事件 A 表示第 k 次取得黑球, 則

$$P(A|B_i)=\frac{a-i}{a+b-k+1}。$$

於是按全概率公式, 得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\binom{k-1}{i}\cdot a(a-1)\cdots(a-i+1)(a-i)\cdot b\cdots[b-(k-1-i)+1]}{(a+b)\cdots(a+b-k+2)(a+b-k+1)}$$

$$= \frac{a}{a+b} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\frac{(k-1)!}{i!(k-1-i)!} \cdot \frac{(a-1)!}{(a-1-i)!} \cdot \frac{b!}{[b-(k-1-i)]!}}{\frac{(a+b-1)!}{(a+b-k)!}}$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(a-1)!}{i![(a-1)-i]!} \cdot \frac{b!}{(k-1-i)![b-(k-1-i)]!}}{\frac{(a+b-1)!}{(k-1)![(a+b-1)-(k-1)]!}} = \frac{a}{a+b} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{a-1}{i} \cdot \binom{b}{k-1-i}}{\binom{a+b-1}{k-1}}$$

由組合恒等式 $\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$ 知

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{a-1}{i}\binom{b}{k-1-i} = \binom{a+b-1}{k-1},$$

所以 $P(A) = \frac{a}{a+b}$。

這種考慮很全面, 其思維方式一般人也較易接受, 然而雖全面而不得要領, 造成運算繁雜, 計算量較大。事實上, 問題所對應的隨機試驗屬古典概型。(即滿足有限性和等可能性) 因而可以用概率的古典定義來計算概率。從而又可得出以下幾種解法。

解法一: 把 a 個黑球及 b 個白球都看作是不同的 (例如設想把它們編號), 若把摸出的球依次放在排列成一直線的 $a+b$ 個位置上, 則可能的排列法相當於把 $a+b$ 個元素進行全排列, 總數爲 $(a+b)!$, 把它們作爲樣本點的全體, 又因爲第 k 次摸得黑球有 a 種取法, 而另外 $(a+b-1)$ 次摸球相當於 $a+b-1$ 個球進行全排列, 所以有利場合數爲 $a \times (a+b-1)!$, 故所求概率爲

$$P(A) = \frac{a \times (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}。$$

解法二: 把 a 個黑球看作是沒有區別的, 把 b 個白球也看作是沒有區別, 仍把摸出的球依次放在排列成一直線 $a+b$ 個位置上, 因若把 a 個黑球的位置固定下來, 則其他位置必然放白球, 而黑球的位置可以有 $\binom{a+b}{a}$ 種放法, 以這種放法作爲樣本點, 由於第 k 次摸得黑球第 k 個位置必須放黑球, 剩下的黑球可以在 $a+b-1$ 個位置上任取 $a-1$ 個位置, 因此有利場合數爲 $\binom{a+b-1}{a-1}$, 所以所求概率爲 $P(A) = \frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}$

在解法一中把白球看作是有"個性"的, 而解法二中對同色球不加區別, 因此前者要顧及各黑球及各白球間的順序而用排列, 後者則不考慮次序而用組合。解法二中的每一個樣本點是由解法一中的 $a!b!$ 個樣本點合併而成的。由此我們可以看出, 在處理古典概型問題時, 可以選取不同的樣本空間, 選得好, 可以使得問題的處理相當簡便。對此下述二種解法看得更明顯。

解法三: 對 k 次以後的抽球情況不考慮, 把 $a+b$ 個球中任取 k 個球的一個排列看作一個樣本點, 其總數爲 A_{a+b}^{k} , 第 k 次抽到黑球 a 種可能, 前面的 $k-1$ 次是從餘下的 $a+b-1$ 個球中任抽 $k-1$ 個, 故有利場合數爲 aA_{a+b-1}^{k-1} , 因此

$$P(A) = \frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}。$$

解法四: 只考慮第 k 次抽球, $a+b$ 個球中任何一個都有可能在第 k 次被抽到, 故樣本點總數爲 $a+b$, 抽到黑球只有 a 種可能。故 $P(A)=\frac{a}{a+b}$。

解法四是此較簡單的。事實上, 解法四中樣本空間的取法也是最小的 (再小就不能保持等可能性了), 我們爲什麼能取到最小的樣本空間使計算大大簡化了呢? 其中關鍵的一點在於我們抓住了刻劃出欲求概率的事件的本質特點, 而把無關的因素都丟掉不予考慮了。眞可謂妙哉!

種種解法殊途歸一, 這個結論與 k 無關, 回想一下, 就會發覺這與我們日常生活經驗是一致的。例如在體育比賽中進行的抽簽, 對各對機會均等, 與抽簽的先後順序無關。

上述抽球問題中的球也可以是各種實際問題中的"人","產品","物品"等。例如:

某人有 n 種鑰匙, 其中只有一把能打開他的門, 他逐把地取出鑰匙試開, 由上思路及結論, 顯然可知第 i 次打開鎖的概率均爲 $\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$。既使那些表面看來似乎與文中問題無關的問題, 同樣通過轉化可以歸納爲此類問題。

例: 袋中有 a 個黑球, b 個白球, 把球隨機地一個個摸出來 (不放回) 直至袋中剩下的球顏色都相同爲止。求最後剩下的全是黑球的概率。

解: 設想摸球直到摸完爲止, 那麼"最後全剩下黑球" (事件 A) 與"最後摸出的是黑球" (事件 B) 是同一回事。此事可以這樣考慮: 如果最後全剩下黑球 (A 發生), 那麼最後摸出的必是黑球 (B 發生, 所以 $A\subset B$), 反過來, 如果最後摸出的是黑球 (B 發生), 那麼最後剩下同顏色的球時必包含這最後一球, 所以剩下的必全是黑球 (A 發生, 所以 $B\subset A$), 因此兩事件相等, 從而事件 B 就是第 $(a+b)$ 次摸出黑球, 所以它的概率爲 $P(A)=\frac{a}{a+b}$。

此題一般的解法是分別計算最後剩下1個,2個, $\ldots$, a 個黑球的概率再相加。注意到剩黑球的前面一個球是白球, 所求概率爲 $\frac{1}{\binom{a+b}{b}}\sum\limits_{k=1}^{b}\binom{a+b-1-k}{a-1}$。由上面的解法它應等於 $a/(a+b)$, 這樣我們就用概率方法證明了一個組合恒等式: $\binom{n}{m}+\binom{n+1}{m}+\cdots+\binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m}{m+1}$ (其中 $m=a-1, n=b$), 又如

例: 袋中有 a 個黑球, b 個白球, 甲乙丙三人依次從袋中取出一球 (取後不放回), 試分別求出三人各自取得白球的概率 ($b\geq 3$)。

對於此題, 同樣可以認爲從袋中隨機地一個個摸球, 分別求第一次, 第二次, 第三次摸出白球的概率。這樣由所討論問題的結論, 顯然可知均爲 $\frac{a}{a+b}$。

凡此種種不再一一枚舉。可見一個好的題目, 探討解題的不同途徑, 不但是一種美的享受, 而且能給人以啓迪, 達到探討一例, 牽動一批, 溝通一片。

—本文作者任教於安徽阜陽師範學院數學系—