一個 $2n$ (n 為奇數) 階魔方陣的簡單解法

劉任昌

摘　要

奇數階魔方陣的解法最爲簡單, 它是一般小學數學課中的生動教材。至於 $4n$ 階魔方陣的解法, 也是可以利用這種魔方陣的對稱原理, 輕易的解出。但是, 關於第三類 $2n$ (n 爲奇數) 階魔方陣的解法, 它的難度卻是遠高於前面兩類。本文要藉由推廣前面兩類魔方陣的解法, 導出一個在目前可以見到的相關文獻中, 對第三類魔方陣較簡單的解法。

1. 前言

魔方陣 (magic square), 又被稱做是「幻方」, 在中國古時候的「洛書」中, 它則被稱做是「縱橫圖」[1]。魔方陣的條件是:

> 將 $\{1, 2, \cdots, n^2-1, n^2\}$ 排列在一個 $n \times n$ 維的矩陣中, 讓每一橫列、每一縱欄與兩條對角線的數字和, 都相等。

魔方陣在初級組合數學 (Combainatorics) 的領域, 是一項非常生動的內容, 它也常被小學或中學老師拿來當作授課的內容之一, 希望因此而激發學生思考數學問題的興趣。

但是在一般的教材中, 只舉出了奇數階與 $4k$ 階魔方陣的排列方式, 原因是這兩類魔方陣的解法相當容易, 但是對於六階魔方陣的解法, 則避而不談, 最典型的例子, 就是 Brualdi, R. A. 所寫的『Introductory Combainatorics』[2]。

這篇文章的主要目的, 是要導出一個對任意 $2n$(n爲奇數) 階魔方陣的簡單排列方法, 並且將它證明。本文的內容如下, 第2節先複習奇數階與 $4k$ 階魔方陣的解法, 第3節介紹六階魔方陣的解法, 第4節介紹十階魔方陣的解法, 第5節利用前面兩節的結果, 歸納出一個解任意 $2n$ (n 爲奇數) 階魔方陣的步驟, 第6節則是證明上一節步驟的結果, 並且做結論。

2. 奇數階與 $4n$ 階的魔方陣

奇數階魔方陣的解法相當簡單, 它是一般小學數學課中的生動教材, 例如, 排列三階魔方陣的常用步驟爲 de la Loubére 方法[2]:

	1	

⇒

	1	
		2

⇒

	1	
3		
		2

⇒

	1	
3		
4		2

⇒ ⋯ ⇒

8	1	6
3	5	7
4	9	2

關於 $4n$ 階魔方陣的解法, 也是可以利用這種魔方陣的對稱原理, 輕易的解出來, 例如我們可以用下列的步驟解四階方陣 [2]:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

⇒

1	**15**	**14**	4
12	6	7	**9**
8	10	11	**5**
13	**3**	**2**	16

上面所介紹的兩種解法, 只是衆多解法中, 被認爲最簡單的兩種方法, 它們的證明過程也是相當的容易, 只要使用類似梁培基與張航輔 在「 $4k$ 階全對稱幻方的一種快速構作方法」[3] 該篇文章的證明方法即可。

眞正具有難度的魔方陣, 是 $2n$ (n 是奇數) 階的魔方陣。

3. 解六階的魔方陣

先讓我們考慮上一節的三階方陣, 它的組成元素是 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 但是, 我們現在使用 $\{0,4,8,12,16,20,24,28,32\}$ (差爲 4 的等差數列) 來當作它的組成元素, 則

28	0	20
8	16	24
12	32	4

(1)

仍然是一個橫、直、對角方向的和, 皆爲 48的魔方陣。

接著, 讓我們考慮下面這一個由 (1) 式所擴展成的六階方陣:

28	28	0	0	20	20
28	28	0	0	20	20
8	8	16	16	24	24
8	8	16	16	24	24
12	12	32	32	4	4
12	12	33	33	4	4

(2)

它是一個橫、直、對角方向的和, 皆爲 96的方陣。

再讓我們觀察下面這個六階的方陣:

$\Theta =$

4	2	4	2	1	2
1	3	1	3	4	3
4	2	1	2	4	2
1	3	4	3	1	3
4	2	4	2	1	2
1	3	1	3	4	3

(3)

Θ是一個橫、直、對角方向的和, 皆爲 15的方陣。

我們再將方陣 (2) 與方陣 (3) 重疊相加, 就得到如下的六階的魔方陣了。

32	30	4	2	21	22
29	31	1	3	24	23
12	10	17	18	28	26
9	11	20	19	25	27
16	14	36	34	5	6
13	15	33	35	8	7

(4)

它的橫、直、對角方向的和, 是 $96+15=111=\frac{36\times(36+1)}{2}\times\frac{1}{6}$。

4. 解十階的魔方陣

以同樣類似的方法, 我們使用

64	92	0	28	56
88	16	24	52	60
12	20	48	76	84
36	44	72	80	8
40	68	96	4	32

(5)

替代方陣 (1)。方陣 (5) 的組成元素也是差爲4的等差數列。

接著, 我們使用

4	3	4	2	4	2	1	2	1	2
1	2	1	3	1	3	4	3	4	3
4	3	**4**	**2**	**4**	**2**	**1**	**2**	1	2
1	2	**1**	**3**	**1**	**3**	**4**	**3**	4	3
4	3	**4**	**2**	**1**	**2**	**4**	**2**	1	2
1	2	**1**	**3**	**4**	**3**	**1**	**3**	4	3
4	3	**4**	**2**	**4**	**2**	**1**	**2**	1	2
1	2	**1**	**3**	**1**	**3**	**4**	**3**	4	3
4	3	4	2	4	2	1	2	1	2
1	2	1	3	1	3	4	3	4	3

(6)

替代方陣 (3)。

我們再將擴展後的方陣 (5) 與方陣 (6) 重疊相加, 就得到橫、直、對角方向的和, 皆是 $\frac{100\times(100+1)}{2}\times\frac{1}{10}=505$ 的十階的魔方陣了。

在方陣 (6) 中, 最左兩欄完全是由

4	3
1	2

(7)

組成。

最右兩欄則完全是由

1	2
4	3

(8)

組成。

此外, 我們特別將該方陣中央部份的 $6\times 6=36$ 個數字加粗, 這是因爲這部份六階方陣的數字與方陣 (3) 完全相同。如果我們能掌握住這 36 個數字的排列方式和性質, 我們便可以在下一單元中, 輕易的推導出任意 $2n$ (n 爲任意奇數) 階的魔方陣了。

5. 解 $2n$ (n 為奇數) 階的魔方陣的步驟

從上面兩節的內容, 我們已經可以歸納出一個排列 $2n$ (n爲奇數) 階魔方陣的方法了:

(一)、使用 $\{4k|k=0,1,\cdots,n^2-1\}$ 的等差數列, 排列出一個 n階, 且橫、直、對角線方向的和等於 $\frac{n^2(4n^2-4)}{2}\times\frac{1}{n}=2n^3-2n$ 的魔方陣。例如 (1) 式。

(二)、將步驟 (一) 方陣中的每一元素, 擴展成 2×2 維、數字相等的方陣, 我們因此

而得到一個 $2n$ 階的方陣, 我們用 Σ 表示這一個 $2n$ 階的方陣。例如 (2) 式。

(三)、將方陣 (3) 的 Θ 同時做上、下方向對稱的擴展, 擴展的矩陣是

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad (9)$$

。最後, Θ 被擴展成爲一個 $(2n)\times 6$ 的矩陣。我們用 Θ' 代表這一個擴展後的新矩陣。例如 (6) 式中的

$$\begin{array}{|cc|cc|cc|}\hline 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \hline 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad (10)$$

(四)、將步驟 (三) 中的 Θ' , 同時做左、右兩端對稱的擴展, 擴展的元素分別由方陣 (7) 與方陣 (8) 去塡充 , 使它由一個 $(2n)\times 6$ 的矩陣, 擴展成一個 $(2n)\times 10$ 的矩陣, 再擴展成 $(2n)\times 14$的矩陣,... 直到 Θ' 變成一個 $(2n)\times(2n)$ 的矩陣, 也就是一個 $2n$ 階的方陣, 將這個方陣用 Θ'' 表示。例如 (10) 式被擴展成 (6) 式。

(五)、將步驟 (二) 的 Σ 與步驟 (四) 的 Θ'' 重疊相加, 就得到一個 $2n$ 階的魔方陣了。

6. 證明

因爲 Σ (由 $\{4k|k{=}0,1,\cdots n^2{-}1\}$ 組成) 與 Θ''(由$\{1,2,3,4\}$ 組成) 重疊相加後, 這個新方陣的組成元素是 $\{1,2,\cdots,4n^2\}$, 所以, 爲了要證明步驟 (五) 的結果確實是一個魔方陣, 我們僅需要證明步驟 (二) 所產生的 Σ 與步驟 (四) 所產生的 Θ'' , 都是一個橫、直、對角線方向的和相等的方陣。

因爲步驟 (二) 的 Σ 是由步驟 (一) 的奇數階魔方陣擴展而來, 所以,Σ的橫、直、對角線方向的和皆相等, 而且等於 $\frac{n^2(4n^2-4)}{2}\times\frac{1}{n}\times 2=4n^3-4n$。

關於步驟 (三) 中 Θ , 它只是一個 6×6 的方陣, 且組成元素是 $\{1,2,3,4\}$, 我們可以輕易的使用觀察法看出, 它橫、直、對角線方向的和, 都是 15 。

接著, 當我們使用 (9) 式對 Θ 做上、下方向的擴增時; 在橫的方向, 每一列的總合固定是15; 在直的方向, 仍然是維持每擴增兩列, 和就增加 5 的情形。所以, 我們最後所形成的 Θ', 是一個橫列方向和等於 15 , 而直欄方向和等於 $5n$的矩陣。

接下來, 讓我們討論步驟 (五) 的 Θ''。

在直欄的方向, 仍然是維持每擴增兩列, 就增加 5的情形, 所以, 直欄方向的和等於 $5n$。在橫列的方向, 則因方陣 (7) 與方陣 (8) 被用來左、右對稱擴增, 所以, 這個矩陣每擴增兩欄, 它的橫列方向的和就增加 10。最後, Θ''每一橫列的和就等於 $5n$。

在對角線方向, 由於左上角的擴展元素是 (7) 式中的 $\{4,2\}$, 右下角的擴展元素是 (8) 式中的 $\{1,3\}$, 所以, 在這個對角線的方向, 它的和仍然是每擴增兩欄, 就增加 10。

Θ'' 另一對角線方向也是類似如此, 所以, Θ'' 的兩條對角線方向和將等於 $5n$。

在 Σ與 Θ''重疊相加之後, 它們每一方向的和等於 $(4n^3-4n)+5n$, 也等於 $\frac{4n^2(4n^2+1)}{2}\times\frac{1}{2n}$, 這正是一個 $2n$ 階魔方陣橫、直、對角線方向的和。

實際上, 當我們排列 $2n$ 階魔方陣的時候, 我們就使用類似排列奇數階魔方陣的方法, 例如:

		4	2		
		1	3		

$\Rightarrow$

		4	2		
		1	3		
				5	6
				8	7

$\Rightarrow$

		4	2		
		1	3		
12	10				
9	11				
				5	6
				8	7

$\Rightarrow$

		4	2		
		1	3		
12	10				
9	11				
				5	6
				8	7

$\Rightarrow$

		4	2		
		1	3		
12	10				
9	11				
16	14			5	6
13	15			8	7

$\Rightarrow$

		4	2		
		1	3		
12	10	17	18		
9	11	20	19		
16	14			5	6
13	15			8	7

$\Rightarrow$

		4	2	21	22
		1	3	24	23
12	10	17	18		
9	11	20	19		
16	14			5	6
13	15			8	7

$\Rightarrow$

		4	2	21	22
		1	3	24	23
12	10	17	18	28	26
9	11	20	19	25	27
16	14			5	6
13	15			8	7

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow$ 魔方陣(4)。

參考資料

1. 幼獅數學大辭典, 幼獅出版社, 臺北市, 1992. 第2309-2311頁。
2. R. A. Brualdi, Introduction to Combainatorics, North-Holland, New York, 1977, P.6-7.
3. 梁培基與張航輔, $4k$ 階全對稱幻方的一種快速構作方法, 數學傳播, 17(4):87-92, 1993。

—本文作者爲國立政治大學金融學系助教