狄拉克定理的新證明

詹國樑

摘要: 本文對圖論中著名的狄拉克定理, 分別用逐步調整法和數學歸納法這兩種初等方法給出新證明, 構思新穎巧妙, 無需使用圖論術語。

關鍵詞: 哈密頓回路、狄拉克定理、良序排列。

對於一個給定的連通圖, 是否存在哈密頓 (Hamilton) 回路, 這是圖論中至今尚未解決的一個著名難題。1952年, 歐洲數學家狄拉克 (Dirac) 建立了下面的定理, 簡單明瞭地給出了哈密頓回路存在的充分條件, 這是圖論史上的一項重要成果。

定理 (Dirac): 具有 $n(n\geq 3)$ 個頂點的簡單圖, 如果每個頂點 v 的度 $d(v)\geq\frac{n}{2}$, 則一定存在一條哈密頓回路。

紐曼 (Newman) 和波塞 (Pósa) 曾分別於1958年和1962年對狄拉克定理作出“光彩奪目”的證明 [1] 。現在所見的圖論著作 [2] 中又用反證法給予證明。在本文中, 筆者分別用逐步調整法和數學歸納法給出兩種新證法, 以供同仁研究參考。

爲了避免使用圖論術語, 我們不妨將狄拉克定理改述爲與之等價的命題:

命題: 現有 $n(n\geq 3)$ 個人, 每個人的朋友至少有 $\frac{n}{2}$ 個, 則這 n 個人可以圍坐一圈, 相鄰者均爲朋友。

證明一: (用逐步調整法)

先讓這些人隨意圍坐一圈, 不妨設他們的坐次爲 $F_1,F_2,\cdots,F_{n-1},F_n$, 其中 F_1 與 F_n 不是朋友。現構作集合 $F^*=\{F_i|F_1\text{與}F_{i+1}\text{是朋友}\}$ $(i=1,2,3\cdots,n-2)$, 由題設知 F^* 中至少有 $\frac{n}{2}$ 個人, 且 F_n 與 F^* 中至少有一個是朋友 (如若不然, F_n 和 F^* 中任何一個人都不是朋友, 則因 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}-F^*$ 中至多有 $\frac{n}{2}$ 個人, 故 F_n 至多有 $\frac{n}{2}-1$ 個朋友, 此與題設矛盾), 設他爲 F_j。此時, 圓圈上坐有

$$F_1,F_2,\cdots,F_j,F_{j+1},\cdots,F_{n-1},F_n,F_1 \tag{1}$$

再將上面的坐次作如下調整: $F_1,F_2,\cdots,F_j$ 原封不動, 而將 F_j 以後的 $F_{j+1},\cdots,F_{n-1},F_n$ 這部分人的坐次全都顚倒過來, 重新入坐, 即圓圈上所有人的坐次調整爲

$$F_1,F_2,\cdots,F_j,F_n,F_{n-1},\cdots,F_{j+1},F_1 \tag{2}$$

比較坐法 (1) 和 (2): 由於 (1) 和 (2) 中 $F_1,F_2,\cdots,F_j$ 相鄰者爲朋友 (或不是朋友) 的對數相等, (1) 中 $F_{j+1},\cdots,F_{n-1},F_n$ 和 (2) 中 $F_n,F_{n-1},\cdots,F_{j+1}$ 相鄰者爲朋友 (或不是朋友) 的對數也相等, 而 (2) 中 F_n 和 F_j 是朋友, 且由 F^* 的定義知 F_1 和 F_{j+1}

也是朋友。但是, (1) 中 F_n 和 F_1 不是朋友, F_j 和 F_{j+1} 是不是朋友尚屬未知。可見, 進行這樣一次調整至少可以增加一對朋友相鄰。故作如此調整, 至多需 n 次, 就可使每個人的鄰坐都是朋友。

證明二: (用數學歸納法)

先考慮將 n 個人排坐在一直線上, 記他們爲 $F_i(i=1,2,\cdots,n)$, 並將相鄰兩人均爲朋友的排列稱爲“良序排列”。可以證明: 對於 $1\leq k\leq n-1$, 如果有 k 個人的一個 “良序排列” $F_1,F_2,\cdots,F_k$, 則必有 $k+1$ 個人也構成一個 “良序排列” $F_1,F_2,\cdots,F_k,F_{k+1}$ 。事實上,

(1) 當 $1\leq k\leq \frac{n}{2}$ 時, 因爲 F_k 至少有 $\frac{n}{2}$ 個友人, 而良序排列 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 中 F_k 的前面最多只有 $\frac{n}{2}-1$ 個人。所以, 在剩下的人中至少有一人是 F_k 的朋友, 記爲 F_{k+1}, 則結論成立。

(2) 當 $\frac{n}{2}<k\leq n-1$ 時, 如果剩下的人中有 F_k 的朋友, 記爲 F_{k+1}, 則結論已成立; 反之, 如果剩下的人均不是 F_k 的朋友, 則可任取其中之一爲 F_{k+1} 。此時, F_k 的友人應在排列 $F_1,F_2,\cdots,F_{k-1}$ 中, 設其中某一個 F_j 是 F_k 的朋友, 則將 F_j 之後的 $k-j$ 個人的順序全部顛倒過來, 而得排列 $F_1,F_2,\cdots,F_j,F_k,F_{k-1},\cdots,F_{j+2},F_{j+1}$, 顯然, 這仍是 k 個人的“良序排列”。由於 F_k 的友人至少有 $\frac{n}{2}$ 個, 故 F_j 的取法至少有 $\frac{n}{2}$ 種, 從而這樣的 F_{j+1} 也至少有 $\frac{n}{2}$ 個。由於所有的人數爲 n, 而 F_{k+1} 的朋友數又不少於 $\frac{n}{2}$ 。因此, 在這些 F_{j+1} 中至少有一個是 F_{k+1} 的朋友。當 F_{j+1} 恰好是 F_{k+1} 的朋友時, $F_1,F_2,\cdots,F_j,F_k,\cdots,F_{j+1},F_{k+1}$ 就是 $k+1$ 個人的一個“良序排列”了。於是, 結論仍然正確。

根據上述結論, 並由數學歸納法可知: 這些在一直線上排列著的 n 個人, 總可以進行重排成一個“良序排列”:

$$F_1,F_2,\cdots,F_n \qquad (*)$$

此時, 若 F_1 是 F_n 的朋友, 則按次序 $(*)$ 圍坐一圈, 相鄰者均爲朋友; 若 F_1 不是 F_n 的朋友, 則可仿照 (2) 中的做法, 找出一個“良序排列”:

$$F_1,F_2,\ldots,F_j,F_n,F_{n-1},\ldots,F_{j+1},$$

使 F_{j+1} 和 F_1 爲朋友 (具體做法是: 設某一個 F_j 是 F_n 的朋友, 則將“良序排列” $F_1,F_2,\cdots,F_j,F_{j+1},\cdots,F_n$ 中 F_j 之後的 $n-j$ 個人的順序全部顛倒過來之後, 所得排列 $F_1,F_2,\cdots,F_j,F_n,F_{n-1},\cdots,F_{j+2}$, F_{j+1} 仍是良序排列。由於 F_n 的友人至少有 $\frac{n}{2}$ 個, 故 F_j 的取法至少有 $\frac{n}{2}$ 種, 從而這樣的 F_{j+1} 也至少有 $\frac{n}{2}$ 個。又由於所有的人數爲 n, 而 F_1 的朋友數也不少於 $\frac{n}{2}$, 因此在這些 F_{j+1} 中至少有一個是 F_1 的朋友。當其中某一個 F_{j+1} 恰好爲 F_1 的朋友時, $F_1,F_2,\cdots,F_j,F_n,F_{n-1},\cdots,F_{j+1}$ 就是一個良序排列, 且 F_{j+1} 和 F_1 爲朋友)。於是, 圍坐一圈後, 相鄰者仍均爲朋友。

參考資料

1. 左宗明編著,「 世界數學名題選講」, 上海科技出版社, 1990。

2. 王朝瑞編,「 圖論」, 高等教育出版社, 1983。
3. 李國偉, 只要想得巧,「數學傳播」 二卷一期 (民國66年7月), p. 38-39。
4. 何景國, 拓樸學中的一筆畫與尤拉公式, 「數學傳播」 七卷四期 (民國 72 年 12 月), p. 17-28。

—本文作者任教於中國蘇州教育學院—