四次方程式之待定因式解法

張國男

壹. 緒論

本篇所論之方程式, 其係數均爲複數; 先此聲明, 下不贅述。若某方程式之所有解俱可由其係數經有限多次加、減、乘、除、開方而得之, 則謂該方程式有根式解。本文主旨, 在紹介待定因式法, 藉之證明任意四次方程式均有根式解, 兼示其用於實際求解, 並與 Ferrari 解法作比較。因涉及更低次方程式之根式解問題, 故依次推導如下:

[I]一次方程式

顯然, 一次方程式

$$c_0x+c_1=0(c_0\neq 0)$$

與

$$x+\frac{c_1}{c_0}=0$$

相當, 其解爲

$$x=-\frac{c_1}{c_0},$$

故任意一次方程式均有根式解。

[II]二次方程式

二次方程式 $c_0x^2+c_1x+c_2=0(c_0\neq 0)$ 與 $x^2+\frac{c_1}{c_0}x+\frac{c_2}{c_0}=0$ 相當。若令 $y=x+\frac{c_1}{2c_0}$ (即 $x=y-\frac{c_1}{2c_0}$) 以施行平行變換 (此即所謂配方), 可知後者又與 $y^2=\frac{c_1^2-4c_0c_2}{4c_0^2}$ 相當。開平方 (即求 $\frac{c_1^2-4c_0c_2}{4c_0^2}$ 之平方根), 可得 $y=\pm\frac{\sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}{2c_0}$, 故 $x=\frac{-c_1\pm\sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}{2c_0}$, 此即二次方程式 $c_0x^2+c_1x+c_2=0(c_0\neq 0)$ 之解 (根) 之公式, 乃衆所熟悉者。由是, 遂知: 任意二次方程式均有根式解。[註: 方程式 $x^2=a+bi$ (其中 a 與 b 均爲實數) 之解 (根), 稱爲複數 $a+bi$ 之平方根 (即二次方根)。爲方便計, 在本篇中, $a+bi$ 之平方根主値, 恒以 $\sqrt{a+bi}$ 表之。玆說明其定義如次:(i) 當 $a>0$ 時, 方程式 $x^2=a$ 之二根, 一正一負, 其中之正根, 以 $\sqrt{a}$ 表之, 稱爲 a 之平方根主値, 而另一根則爲 $-\sqrt{a}$ 。(ii) 當 $a<0$ 時,$-a>0$, 規定 a 之平方根主値爲 $\sqrt{a}=\sqrt{-a}i$ (其中 i 爲虛數單位); 此時, 方程式 $x^2=a$ 之二根爲 $\pm\sqrt{a}$。特別當 $a=-1$ 時, 由此規定可得 $\sqrt{-1}=\sqrt{-(-1)}i=\sqrt{1}i=i$ (正與一般

用法一致), 即虛數單位 i 爲 -1 之平方根主値, 方程式 $x^2=-1$ 之二根爲 $\pm i$。(iii) 因 $x^2=0$ 之二根均爲0, 當然規定0之平方根主値 $\sqrt{0}=0$。(iv) 當 $b\neq 0$ 時, 極易驗證 (亦不難直接求得) $x^2=a+bi$ 之二根爲 $\pm[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\frac{b}{\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}}i]$, 可規定 $a+bi$ 之平方根主値爲 $\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\frac{b}{\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}}i$, 故 $a+bi$ 之二個平方根即爲 $\pm\sqrt{a+bi}$ 。事實上, 若 (iii) 與 (i) 已界定如上, 則亦可利用極式表示法, 以界定異於0之複數 $a+bi$ 之平方根主値 $\sqrt{a+bi}$, 茲述如下: 因 $a+bi\neq 0$, 可書 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}>0$, 且 $-\pi<\theta\leq\pi$。由 de Moivre 定理 (公式), 可知 $a+bi$ 之二個平方根爲 $\sqrt{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2})$, 其中 $k=0,1$。複數 $a+bi$ 之平方根主値, 可規定爲上式當 $k=0$ 時之值, 即 $\sqrt{a+bi}=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$; 如是, 則 $a+bi$ 之另一個平方根即爲 $\sqrt{r}[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)]=-\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})=-\sqrt{a+bi}$。此二種定義, 其實相同, 不難驗證之。]

[III]三次方程式

1. Cardan 公式

三次方程式 $c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0(c_0\neq 0)$ 與 $x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=0$ 相當, 其中 $C_1=\frac{c_1}{c_0},C_2=\frac{c_2}{c_0},C_3=\frac{c_3}{c_0}$。若以 $y=x+\frac{C_1}{3}$ (即$x=y-\frac{C_1}{3}$) 施行平行變換, 則後者又與 $y^3+py+q=0$ 相當, 其中 $p=C_2-\frac{C_1^2}{3}$, $q=C_3-\frac{C_1C_2}{3}+\frac{2C_1^3}{27}$, 故 p 與 q 均可表爲 c_0,c_1,c_2,c_3 之有理式。欲解方程式

$$y^3+py+q=0, \tag{1}$$

可設 $y=u+v$, 其中 u 與 v 二者之値待定。以之代入 (1), 可得 $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$。但僅由此一式不足以確定 u 與 v 二者之值, 故不妨嘗試自行增設一個適當條件, 俾便與前式聯合之, 以解 u 與 v 。注意甫得之式爲 u,v 之三次方程式, 其形式相當繁雜。不難發現, 若增設之條件爲 $3uv+p=0$, 則該式即可化簡爲 $u^3+v^3=-q$; 又由 $3uv+p=0$, 可得 $u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$ 。據此, 可知 u^3 與 v^3 爲方程式

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0 \tag{2}$$

之二根, 即 $u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, v^3=-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$。因 $y=u+v, u^3+v^3=-q$ 與 $3uv+p=0$ 關於 u,v 對稱, 故不妨假定上列二處 $\pm$ 號中, 前者取 $+$ 號, 後者取 $-$ 號。如是, 綜合所得, 有

$$\begin{cases} u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\cdots\text{(i)}, \\ v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\cdots\text{(ii)}, \\ uv=-\frac{p}{3}\cdots\text{(iii)}, \\ y=u+v\cdots\text{(iv)}。\end{cases} \tag{3}$$

欲解 (3) 之 (i) $\sim$ (iii), 可設 $A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$; 因 $AB=-\frac{p^3}{27}$, 故分 $p\neq 0$ 與 $p=0$ 二種情況討論之。當 $p\neq 0$ 時, $A\neq 0, B\neq 0$。若 u_1 爲 A 之一個立方根, 則 A 之另二個立方根爲 ωu_1 與 ω^2u_1, 其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。令 $v_1=-\frac{p}{3u_1}$ (即 $u_1v_1=-\frac{p}{3}$), 則 $u_1^3v_1^3=(u_1v_1)^3=(-\frac{p}{3})^3=AB=u_1^3B$, 故 $v_1^3=B$, 遂知 v_1 爲 B 之一個立方根,

而 B 之另二個立方根爲 ωv_1 與 $\omega^2 v_1$。由此, 顯然可知 (3) 之 (i) ∼ (iii) 恰有三組解, 即 $(u,v) = (u_1,v_1),(\omega u_1,\omega^2 v_1)$ 與 $(\omega^2 u_1,\omega v_1)$ 。以之代入 (3) 之 (iv), 令 $y_1 = u_1+v_1, y_2 = \omega u_1+\omega^2 v_1, y_3 = \omega^2 u_1+\omega v_1$。綜上所論或直接驗證 $y^3+py+q = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, 即知: 當 $p \neq 0$ 時, 方程式 (1) 之解爲 y_1, y_2 與 y_3 。若 $p = 0$, 則 (甲) $A = -q, B = 0$, 或 (乙) $A = 0, B = -q$。若 s 爲 $-q$ 之一個立方根, 則於 (甲) 之下, (3) 之 (i) ∼ (iii) 之解爲 $(u,v) = (s,0),(\omega s,0),(\omega^2 s,0)$, 令 $u_1 = s, v_1 = 0$, 則 $y_1 = u_1+v_1 = s, y_2 = \omega u_1+\omega^2 v_1 = \omega s, y_3 = \omega^2 u_1+\omega v_1 = \omega^2 s$, 而於 (乙) 之下,(3) 之 (i) ∼ (iii) 之解爲 $(u,v) = (0,s),(0,\omega s),(0,\omega^2 s)$, 令 $u_1 = 0, v_1 = s$, 則 $y_1 = u_1+v_1 = s, y_2 = \omega u_1+\omega^2 v_1 = \omega^2 s, y_3 = \omega^2 u_1+\omega v_1 = \omega s$。顯然, 當 $p = 0$ 時, 如是所得之 y_1, y_2 與 y_3, 即 $-q$ 之三個立方根, 確爲方程式 (1) 之解。[註: 當 $p = 0$ 時,(1) 爲 $y^3+q = 0$, 無須考慮 (3) 之 (i) ∼ (iii), 即知其解爲 $-q$ 之三個立方根。此處之所以由 (3) 之 (i) ∼ (iii) 著手, 其目的在說明: 無論 $p \neq 0$ 或 $p = 0$, 均可藉 (3) 之 (i) ∼ (iii) 之任意一組解 $(u,v) = (u_1,v_1)$, 而將 (1) 之三個解表爲 $y_1 = u_1+v_1, y_2 = \omega u_1+\omega^2 v_1$ 與 $y_3 = \omega^2 u_1+\omega v_1$ 之形式。] 於是, 可將 Cardan 公式 (Cardan, 一作 Cardano) 表述如下:

Cardan公式

三次方程式 $y^3+py+q = 0$ 之解爲

$$y_1 = u_1+v_1,$$
$$y_2 = \omega u_1+\omega^2 v_1,$$
$$y_3 = \omega^2 u_1+\omega v_1,$$

其中

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

而 (u_1,v_1) 則爲滿足

$$u^3 = -\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$
$$v^3 = -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

與

$$uv = -\frac{p}{3}$$

之任意一組解。

至此, 已導得重要之結果: 任意三次方程式均有根式解。

上列之 Cardan 公式, 一般高中數學教本均有介紹, 唯其推導之方式或所據之理論, 可能與上段所示者有別, 且多陳述簡略, 語焉不詳, 故筆者仍不憚煩, 而仔細演示如上。

2. Vieta 代換

在大學數學教本及方程式論書籍中, 亦有使用 Vieta 代換以推求 (1) 之解者, 茲簡介之, 並附若干按語, 以示出其與前法之關

係: 當 $p=0$ 時,(1) 即 $y^3+q=0$, 其解爲 $-q$ 之三個立方根。當 $p\neq 0$ 時, 利用 Vieta 代換 $y=u-\frac{p}{3u}$ [按: 若令 $v=-\frac{p}{3u}$, 則此與 (3) 之 (iii),(iv) 相當。], 可將 (1) 變爲 $u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$, 故 $u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$, 遂知 u^3 爲方程式 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ [按: 此即 (2)。]之二根, 即 $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ [按: 此即 (3) 之 (i)。], 或 $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$。若 u_1 與 u_1' 分別爲 $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 與 $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 之一解, 則前者之解爲 $u_1,\omega u_1$ 與 ω^2u_1, 後者之解爲 $u_1',\omega u_1'$ 與 ω^2u_1', 其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。可取 u_1 與 u_1', 使 $u_1u_1'=-\frac{p}{3}$ [按: 若將 $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 暫改書爲 $v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ (此即 (3) 之 (ii)), 並將 u_1' 暫改書爲 v_1, 則 $(u_1,u_1')=(u_1,v_1)$, 且 $u_1v_1=-\frac{p}{3}$, 其取法已示於前。]; 如此, 則 $(\omega u_1)(\omega^2u_1')=(\omega^2u_1)(\omega u_1')=-\frac{p}{3}$。若令 $f(z)=z-\frac{p}{3z}$, 則 $y_1=f(u_1)=f(u_1')=u_1+u_1', y_2=f(\omega u_1)=f(\omega^2u_1')=\omega u_1+\omega^2u_1'$ 與 $y_3=f(\omega^2u_1)=f(\omega u_1')=\omega^2u_1+\omega u_1'$ 即爲方程式 (1) 之解。[按: 似曾相識? yes! 因 $(u,v)=(u_1,v_1),(\omega u_1,\omega^2v_1),(\omega^2u_1,\omega v_1)$ 三組俱滿足 $uv=-\frac{p}{3}$, 故此三組均滿足 $u-\frac{p}{3u}=v-\frac{p}{3v}=u+v$ 。] 藉上述按語考驗, 可知: 前後二法, 其實無異。

關於 Vieta 代換, 玆再綴數語, 略作解說。衆所周知, 倒數方程式 $u^6-3u^5+2u^4-3u^3+2u^2-3u+1=0$ 可求解如下: 以 u^3 除之, 並集項, 得 $(u^3+\frac{1}{u^3})-3(u^2+\frac{1}{u^2})+2(u+\frac{1}{u})-3=0$。因 $u^2+\frac{1}{u^2}=(u+\frac{1}{u})^2-2, u^3+\frac{1}{u^3}=(u+\frac{1}{u})^3-3(u+\frac{1}{u})$, 故可藉代換 $y=u+\frac{1}{u}$ 將甫得之方程式化爲 $(y^3-3y)-3(y^2-2)+2y-3=0$, 即 $y^3-3y^2-y+3=0$, 而得 $y=-1,1,3$ 。解 $u+\frac{1}{u}=-1, u+\frac{1}{u}=1$ 與 $u+\frac{1}{u}=3$ (即 $u^2+u+1=0, u^2-u+1=0$ 與 $u^2-3u+1=0$) 三方程式, 得 $u=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; 是即原方程式之六根。若干類似於倒數方程式之方程式, 有時亦可仿上求解。例如, 方程式 $u^6+3u^5-4u^4-9u^3+4u^2+3u-1=0$ 可解如次: 以 u^3 除之, 並集項, 得 $(u^3-\frac{1}{u^3})+3(u^2+\frac{1}{u^2})-4(u-\frac{1}{u})-9=0$。因 $u^2+\frac{1}{u^2}=(u-\frac{1}{u})^2+2, u^3-\frac{1}{u^3}=(u-\frac{1}{u})^3+3(u-\frac{1}{u})$, 故可藉代換 $y=u-\frac{1}{u}$ 將甫得之方程式化爲 $(y^3+3y)+3(y^2+2)-4y-9=0$, 即 $y^3+3y^2-y-3=0$, 而得 $y=-3,-1,1$。解 $u-\frac{1}{u}=-3, u-\frac{1}{u}=-1$ 與 $u-\frac{1}{u}=1$ (即 $u^2+3u-1=0, u^2+u-1=0$ 與 $u^2-u-1=0$) 三方程式, 得 $u=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 是即原方程式之六根。(另請參看第參節首段末例。) 在此二例之推導過程中, 曾考慮代換 $y=u\pm\frac{1}{u}$, 而用及關係式 $u^3\pm\frac{1}{u^3}=y^3\mp 3y$。注意其右邊爲 y 之三次式, 且缺二次項。據此推而廣之, 考慮代換 $y=u+\frac{k}{u}$ (其中 k 爲常數, $k\neq 0$), 即得 $u^3+\frac{k^3}{u^3}=y^3-3ky$。將此式與 (1) 式 $y^3+py+q=0$ 比較, 顯然可知: 若 $-3k=p$ (即 $k=-\frac{p}{3}$), 則 (1) 即化爲 $u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$ 矣; 而此時之代換, 即 Vieta 代換 $y=u-\frac{p}{3u}$ 也。

貳. 主題

任意一次、二次及三次方程式均有根式解, 已論證於前節矣。下一問題, 即任意四次

方程式是否均有根式解? 乃本節所欲探討者也。

對於任意四次方程式 $c_0x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4=0(c_0\neq 0)$, 可先以 c_0 除之, 再以 $y=x+\frac{c_1}{4c_0}$ (即 $x=y-\frac{c_1}{4c_0}$) 施行平行變換, 而得與之相當之方程式 $y^4+ay^2+by+c=0$, 其中係數 a,b 與 c 顯然均可表爲原方程式係數 c_0,c_1,c_2,c_3,c_4 之有理式, 故問題化爲: 方程式

$$y^4+ay^2+by+c=0 \tag{4}$$

是否有根式解? 茲以二法推究如下:

[I]待定因式法

當 $b=0$ 時,(4) 即 $y^4+ay^2+c=0$, 故 $y^2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4c}}{2}, y=\pm\sqrt{\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4c}}{2}}$ 。

以下, 設 $b\neq 0$ 。若方程式 (4) 之四根爲 y_1,y_2,y_3 與 y_4, 則 $y^4+ay^2+by+c=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)$。因由 $y-y_1,y-y_2,y-y_3$ 與 $y-y_4$ 四者, 任取二者相乘, 必得首項係數爲1之二次式, 故 $y^4+ay^2+by+c=(y^2+\alpha y+\beta)(y^2+\alpha' y+\gamma)$。比較兩邊三次項之係數, 可知 $\alpha+\alpha'=0$, 即 $\alpha'=-\alpha$, 故

$$\begin{aligned}&y^4+ay^2+by+c\\=&(y^2+\alpha y+\beta)(y^2-\alpha y+\gamma)。\end{aligned}$$

又因此式左邊一次項之係數 $b\neq 0$, 故 $\alpha\neq 0$ 。總之, 可設

$$\begin{aligned}&y^4+ay^2+by+c\\=&(y^2+\alpha y+\beta)(y^2-\alpha y+\gamma),\\&\alpha\neq 0。\end{aligned}\tag{5}$$

比較兩邊係數, 即知 (5) 相當於

$$\begin{cases}\beta+\gamma=\alpha^2+a\cdots(\text{i}),\\ \beta-\gamma=-\frac{b}{\alpha}\cdots(\text{ii}),\\ \beta\gamma=c\cdots(\text{iii})。\end{cases}\tag{6}$$

由 (6) 之 (i) 與 (ii), 得

$$\beta=\frac{1}{2}[\alpha^2+a-\frac{b}{\alpha}],\gamma=\frac{1}{2}[\alpha^2+a+\frac{b}{\alpha}]。\tag{7}$$

將 (7) 代入 (6) 之 (iii), 並整理之, 得

$$\alpha^4+2a\alpha^2+a^2-4c-\frac{b^2}{\alpha^2}=0,$$

故

$$\alpha^6+2a\alpha^4+(a^2-4c)\alpha^2-b^2=0, \tag{8}$$

遂知 α^2 爲三次方程式

$$t^3+2at^2+(a^2-4c)t-b^2=0 \tag{9}$$

之根。若 α_1 爲 (9) 之任一解之任一平方根 [即 α_1 滿足 (8)], 則因 (9) 之常數項 $-b^2\neq 0$, 故 $\alpha_1^2\neq 0$, 即 $\alpha_1\neq 0$。以之代入 (7), 令

$$\beta_1=\frac{1}{2}[\alpha_1^2+a-\frac{b}{\alpha_1}],$$

$$\gamma_1=\frac{1}{2}[\alpha_1^2+a+\frac{b}{\alpha_1}],$$

則 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ 爲 (6) 之一組解。因 (5) 與 (6) 相當, 故 $y^4+ay^2+by+c=(y^2+\alpha_1y+\beta_1)(y^2-\alpha_1y+\gamma_1)$ 。解 $y^2+\alpha_1y+\beta_1=0$ 與 $y^2-\alpha_1y+\gamma_1=0$ 二個方程式, 即得 (4) 之解矣。茲爲方便計, 以 $(*)$ 表「(4) 之係數經有限多次加、減、乘、除、開方」一語。據前節, 易知 α_1 可由 $(*)$ 而得之, 故 β_1 與 γ_1 亦然; 再據前節, 即知 $y^2+\alpha_1y+\beta_1=0$ 與

$y^2-\alpha_1 y+\gamma_1=0$ 二個方程式之四個解 [即 (4) 之所有解]均可由 $(*)$ 而得之。

由上, 遂知: 不論 $b=0$ 或 $b\neq 0$, 方程式 $y^4+ay^2+by+c=0$ 均有根式解。

至此, 已導得重要之結果: 任意四次方程式均有根式解。

特別當 a, b 與 c 均爲實數, 且 $b\neq 0$ 時, 因 $g(t)=t^3+2at^2+(a^2-4c)t-b^2$ 之係數均爲實數, 而 $g(0)=-b^2<0$, 且 $\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$, 故 (9) 必有正根。若方便, 不妨將 α_1 取爲 (9) 之 (適當) 正根之任一平方根; 如是, 則 α_1, β_1 與 γ_1 俱爲實數矣。事實上, 在此種情形下, 欲求實係數二次因式時, 可於最初即假設 (5) 中之 α, β 與 γ 均爲實數 ($\alpha\neq 0$), 茲直接推導如次: 若 (4) 之根 y_1, y_2, y_3 與 y_4 均爲實數, 則 $y-y_1, y-y_2, y-y_3$ 與 $y-y_4$ 四者中, 任二者乘積之係數均爲實數, 故 α, β 與 γ 均爲實數。若 (4) 有虛根, 因虛根必成共軛對出現, 不妨假設 y_1 與 y_2 爲共軛虛數, 如是則 $(y-y_1)(y-y_2)$ 爲實係數二次式, 此時不論 y_3 與 y_4 爲共軛虛數或均爲實數, $(y-y_3)(y-y_4)$ 亦必爲實係數二次式, 故可設 α, β 與 γ 均爲實數。

[II] 拼湊方差法 (Ferrari 解法)

當 $b=0$ 時, (4) 即 $y^4+ay^2+c=0$, 故 $y^2=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4c}}{2}, y=\pm\sqrt{\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4c}}{2}}$。

若 $b\neq 0$, 於 (4) 之左邊 (或兩邊各) 加減 $uy^2+\frac{u^2}{4}$, 可知 (4) 相當於 $y^4+uy^2+\frac{u^2}{4}-uy^2+ay^2+by-\frac{u^2}{4}+c=0$; 故對一切 u 而言, (4) 必相當於

$$[y^2+\frac{u}{2}]^2-[(u-a)y^2-by+(\frac{u^2}{4}-c)]=0。\tag{10}$$

當 $u\neq a$ 時, 考慮 y 之二次式 $(u-a)y^2-by+(\frac{u^2}{4}-c)$, 由配方法, 可知 $(u-a)y^2-by+(\frac{u^2}{4}-c)=[\sqrt{u-a}\,y-\frac{b}{2\sqrt{u-a}}]^2$ 之充要條件爲判別式

$$b^2-4(u-a)(\frac{u^2}{4}-c)=0,$$

即

$$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0。\tag{11}$$

令 $h(u)=u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)$ 。若 u_1 爲 (11) 之任一解, 則因 $h(a)=-b^2\neq 0$, 而 $h(u_1)=0$, 故知 $u_1\neq a$, 據上遂得 $(u_1-a)y^2-by+(\frac{u_1^2}{4}-c)=[\sqrt{u_1-a}\,y-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}]^2$。因此, 若以 $u=u_1$ 代入 (10), 則 (4) 即相當於 $[y^2+\frac{u_1}{2}]^2-[\sqrt{u_1-a}\,y-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}]^2=0$ 矣。換言之, 方程式 (4) 相當於下列二個方程式:

$$y^2+\sqrt{u_1-a}\,y+[\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}]=0,\tag{12}$$

$$y^2-\sqrt{u_1-a}\,y+[\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}]=0。\tag{13}$$

爲方便計, 以 $(*)$ 表「(4) 之係數經有限多次加、減、乘、除、開方」一語。據前節, 易知 u_1 可由 $(*)$ 而得之, 故 (12) 與 (13) 二個方程式之四個解 [即 (4) 之所有解] 亦均可由 $(*)$ 而得之。

由上, 遂知: 不論 $b=0$ 或 $b\neq 0$, 方程式 $y^4+ay^2+by+c=0$ 均有根式解; 故任意四次方程式亦必有根式解。

特別當 a, b 與 c 均爲實數, 且 $b \neq 0$ 時, 因 $h(u)=u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)$ 之係數均爲實數, 而 $h(a)=-b^2<0$, 且 $\lim_{u\to\infty} h(u)=\infty$, 故 (11) 必有大於 a 之根。若 u_1 爲如是之一根 [即 u_1 爲實係數方程式 (11) 之一根, 且 $u_1>a$ 。], 則 (12) 與 (13) 之係數均爲實數; 故若方便, 不妨如是 (適當) 選取 u_1, 再解 (12) 與 (13), 以求 (4) 之四根。

參. 釋例

任意三次方程式與四次方程式均有根式解, 已證如前矣。對於已予任一個三次方程式或四次方程式, 依照上述之推導步驟進行或逕用公式, 當然必可得其根式解; 但, 有時使用他法, 反較便捷。茲舉數例簡釋之: 如 $x^3-3ix+1-i=0$ 與 $x^3+3x^2+5x+6=0$ 二個方程式之求解, 恐須藉助 Cardan 公式; 但對於方程式 $x^3+x^2+x+1=0$, 則可利用因式分解而推求如後: 因 $x^3+x^2+x+1=(x+1)x^2+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$, 故 $x^3+x^2+x+1=0$ 之解爲 -1 與 $\pm i$ 。又如例一、例二與例三 (見下), 以前節之 [I]或 [II]法解之, 尙稱簡易; 但對於方程式 $x^4+4x^3+x^2-4x+1=0$, 則不妨模仿倒數方程式之解法而求解如下: 因 $x\neq 0$, 故 $x^4+4x^3+x^2-4x+1=x^2[(x^2+\frac{1}{x^2})+4(x-\frac{1}{x})+1]=x^2[(x-\frac{1}{x})^2+4(x-\frac{1}{x})+3]=x^2(x-\frac{1}{x}+1)(x-\frac{1}{x}+3)=(x^2+x-1)(x^2+3x-1)$, 遂知 $x^4+4x^3+x^2-4x+1=0$ 之解爲 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 與 $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ 矣。

茲舉三例, 示解於後, 以明前節 [I]與 [I]二法之效用。其中, 例一之解1據 [I]法求根, 解2依 [II]法推導。例二與例三, 則俱用 [I]法處理, 讀者不妨以 [II]法解之。

例一: 試解方程式 $x^4-4x^3+x^2+8x-3=0$。

解1: 令 $x=y+1$ 代入原方程式以消去三次項 (或連續應用綜合除法求新方程式之係數), 得 $y^4-5y^2+2y+3=0$。

設 y^4-5y^2+2y+3
$=(y^2+\alpha y+\beta)(y^2-\alpha y+\gamma)$
$=y^4+(\beta+\gamma-\alpha^2)y^2+\alpha(\gamma-\beta)y+\beta\gamma$,
其中 $\alpha\neq 0$。比較係數, 知此實相當於
(i) $\beta+\gamma=\alpha^2-5$,
(ii) $\beta-\gamma=-\frac{2}{\alpha}$,
(iii) $\beta\gamma=3$。
由 (i) 與 (ii), 得

$$\beta=\frac{1}{2}(\alpha^2-5-\frac{2}{\alpha}), \gamma=\frac{1}{2}(\alpha^2-5+\frac{2}{\alpha})。$$

代入(iii), 得

$$\frac{1}{4}[(\alpha^2-5)-\frac{2}{\alpha}][(\alpha^2-5)+\frac{2}{\alpha}]=3,$$

即 $(\alpha^2-5)^2-12-\frac{4}{\alpha^2}=0$, 亦即 $\alpha^4-10\alpha^2+13-\frac{4}{\alpha^2}=0$, 故 $\alpha^6-10\alpha^4+13\alpha^2-4=0$, 遂知 $(\alpha^2-1)(\alpha^4-9\alpha^2+4)=0$ 。

取 $\alpha=1$, 則 $\beta=-3, \gamma=-1$, 故 $y^4-5y^2+2y+3=(y^2+y-3)(y^2-y-1)$。解 $y^2+y-3=0$ 與 $y^2-y-1=0$ 二方程式, 得 $y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 故原方程式之根爲 $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。

解2: 令 $x=y+1$ 代入原方程式以消去三次項 (或連續應用綜合除法求新方程式之係數), 得 $y^4-5y^2+2y+3=0$, 即

$y^4+uy^2+\frac{u^2}{4}-[(u+5)y^2-2y+(\frac{u^2}{4}-3)]=0$, 亦即

(iv) $[y^2+\frac{u}{2}]^2-[(u+5)y^2-2y+(\frac{u^2}{4}-3)]=0$。

當 $u\neq-5$ 時, 考慮 y 之二次式 $(u+5)y^2-2y+(\frac{u^2}{4}-3)$, 由配方法, 可知 $(u+5)y^2-2y+(\frac{u^2}{4}-3)=[\sqrt{u+5}y-\frac{1}{\sqrt{u+5}}]^2$ 之充要條件爲判別式 $4-4(u+5)(\frac{u^2}{4}-3)=0$, 即 $u^3+5u^2-12u-64=0$, 亦即 $(u+4)(u^2+u-16)=0$ 。

取 $u=-4$ 代入 (iv), 則 (iv) 化爲 $(y^2-2)^2-(y-1)^2=0$, 即 $(y^2+y-3)(y^2-y-1)=0$。解之, 得 $y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2},\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 故原方程式之根爲 $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2},\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 。

[註: 在本題中, 經平行變換 $x=y+1$ 後, 所得新方程式 $y^4-5y^2+2y+3=0$ 有四個相異實根, 即 $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 與 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 爲方便計, 以 y_1,y_2,y_3 與 y_4 表此四根。顯然, 由 $y-y_1,y-y_2,y-y_3$ 與 $y-y_4$ 四個一次式, 任取二個相乘, 共可得${}_4C_2=6$ 個形如 $y^2+\alpha y+\beta$ 之二次式。解1中所得方程式 $\alpha^6-10\alpha^4+13\alpha^2-4=0$ 之六根 $\alpha=\pm1,\pm\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2},\pm\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}$, 恰與上述六個二次式相對應。事實上, 當 $\alpha=1$ 時, $y^2+\alpha y+\beta=y^2+y-3=(y-\frac{-1+\sqrt{13}}{2})(y-\frac{-1-\sqrt{13}}{2})$, 而 $y^2-\alpha y+\gamma=y^2-y-1=(y-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(y-\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ 。當然, 當 $\alpha=-1$ 時, 此二式互換, 即 $y^2+\alpha y+\beta=y^2-y-1$, 而 $y^2-\alpha y+\gamma=y^2+y-3$ 。再者, 比較解1與解2, 可知 $\alpha=\pm1$ 實與 $u=-4$ 相當。其餘情形, 即 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$ (相當於 $u=\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$) 與 $\alpha=\pm\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}$ (相當於 $u=\frac{-1-\sqrt{65}}{2}$) 時, $y^2+\alpha y+\beta$ 與 $y^2-\alpha y+\gamma$ 之因式分解 (即分解爲 $y-y_1,y-y_2,y-y_3$ 與 $y-y_4$ 中二者之乘積) 究竟爲何, 讀者不妨自行推導之。]

例二: 試解方程式 $x^4-3x-2=0$。

解: 設 x^4-3x-2
$=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$
$=x^4+(b+c-a^2)x^2+a(c-b)x+bc$,
其中 $a\neq0$。

比較係數, 知此實相當於

(v) $b+c=a^2$,

(vi) $b-c=\frac{3}{a}$,

(vii) $bc=-2$。

由 (v) 與 (vi), 得 $b=\frac{1}{2}(a^2+\frac{3}{a}),c=\frac{1}{2}(a^2-\frac{3}{a})$ 。代入 (vii), 得 $\frac{1}{4}(a^2+\frac{3}{a})(a^2-\frac{3}{a})=-2$, 即 $a^4+8-\frac{9}{a^2}=0$, 故 $a^6+8a^2-9=0$, 遂知 $(a^2-1)(a^4+a^2+9)=0$。

取 $a=1$, 則 $b=2,c=-1$, 故 $x^4-3x-2=(x^2+x+2)(x^2-x-1)$。

解 $x^2+x+2=0$ 與 $x^2-x-1=0$ 二方程式, 得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2},\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, 故原方程式之根爲 $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2},\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 。

例三: 試解方程式 $x^4+3x^2+4x+5=0$。

解: 設 x^4+3x^2+4x+5
$=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$
$=x^4+(b+c-a^2)x^2+a(c-b)x+bc$,
其中 $a\neq0$ 。比較係數, 知此實相當於

(viii) $b+c=a^2+3$,

(ix) $b-c=-\frac{4}{a}$,

(x) $bc=5$。

由 (viii) 與 (ix), 得 $b = \frac{1}{2}(a^2+3-\frac{4}{a}), c = \frac{1}{2}(a^2+3+\frac{4}{a})$。代入 (x), 得 $\frac{1}{4}[(a^2+3)-\frac{4}{a}][(a^2+3)+\frac{4}{a}] = 5$, 即 $(a^2+3)^2-20-\frac{16}{a^2}=0$, 亦即 $a^4+6a^2-11-\frac{16}{a^2}=0$, 故 $a^6+6a^4-11a^2-16=0$, 遂知 $(a^2+1)(a^4+5a^2-16)=0$。

取 $a=i$, 則 $b=1+2i, c=1-2i$, 故 $x^4+3x^2+4x+5=(x^2+ix+1+2i)(x^2-ix+1-2i)$。解 $x^2+ix+1+2i=0$ 與 $x^2-ix+1-2i=0$ 二方程式, 得

$$x=\frac{-i\pm\sqrt{-5-8i}}{2}$$

(即

$$\pm\frac{1}{2}[\sqrt{\frac{\sqrt{89}-5}{2}}-(\sqrt{\frac{\sqrt{89}+5}{2}}\pm 1)i]),$$

$$\frac{i\pm\sqrt{-5+8i}}{2}$$

(即

$$\pm\frac{1}{2}[\sqrt{\frac{\sqrt{89}-5}{2}}+(\sqrt{\frac{\sqrt{89}+5}{2}}\pm 1)i]);$$

是爲原方程式之四根。[若取

$$a=\sqrt{\frac{\sqrt{89}-5}{2}},$$

則 b 與 c 之值爲何?]

肆. 評比

爲方便比較, 茲再回顧第貳節, 而將其推導步驟概述如次:[I]法係先假設 (5) 式, 即假設 $y^4+ay^2+by+c(b\neq 0)$ 可表爲 $y^2+\alpha y+\beta$ 與 $y^2-\alpha y+\gamma$ 二個二次式之乘積, 其中 α,β 與 γ 爲待定係數 $(\alpha\neq 0)$。此一假設, 確實合理, 其論證 [已示於 (5) 之前]十分簡易, 可謂老嫗都解。其次, 爲求待定因式 $y^2+\alpha y+\beta$ 與 $y^2-\alpha y+\gamma$ (其實, 若其一確定, 則另一即隨之確定), 考慮方程組 (6), 將 β 與 γ 表爲 α 之函數, 得 (7) 後, 由 (8) 或 (9) 求得 α 之一值, 即可確定 α,β,γ 之一組值。最後, 解 $y^2+\alpha y+\beta=0$ 與 $y^2-\alpha y+\gamma=0$ 二方程式, 所得四根即爲原方程式 $y^4+ay^2+by+c=0$ 之解矣。[II]法係先增損 $uy^2+\frac{u^2}{4}$ 二項, 將原方程式變形爲 (10) 式, 其中 u 爲待定係數。其次, 利用配方法, 求得 (10) 中後一方括號內恰爲 y 之一次式平方之充要條件 (11)。由 (11) 求得 u 之一值 u_1, 如是即可將 y^4+ay^2+by+c 拼湊成平方差 $[y^2+\frac{u_1}{2}]^2-[\sqrt{u_1-a}y-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}]^2$。最後, 解 (12) 與 (13) 二方程式, 所得四根即爲原方程式 $y^4+ay^2+by+c=0$ 之解矣。其中, 增損二項, 將 y^4+ay^2+by+c 拼湊成平方差, 爲此法高明處。表面觀之, [I]法順乎自然, 樸拙無華,[II]法矯揉造作, 巧不可階。實際上, 使用 [I]法解題, 有三個係數 α,β 與 γ 之值待定, 除非逕用 (9) 以求 α^2 (故得 α) 或 (8) 以求 α 之值, 再代入 (7) 求得對應之 β 與 γ 之值, 否則須按部就班, 解方程組 (6), 而使用 [II]法, 則僅有一個係數 u 之值待定, 前法所須之演算, 當然較後法所須者多矣。併此以論, 或可謂:[I]與 [II]二法, 各有千秋, 並皆佳妙, 實難分軒輊也。無論如何, 二者俱屬待定係數法。[I]法自始即逕設因式分解 (5), [II]法則先拼湊平方差而後分解因式, 殊途而同歸焉。再者, 令 $\alpha^2=u-a$, 易知 (8) 與 (11) 相當 (即此二式可藉代換

$\alpha^2 = u - a$ 而互換), 故本質上,[I]法與 [II]法實無二致也。

伍. 尾語

關於四次方程式, 一般高中教本多略而不提; 其有論及者, 亦多僅引介 [II]法, 即 Ferrari 解法。至於 [I]法, 即待定因式法, 乃筆者自創者 (前人恐已有使用, 豈可妄稱首創), 未敢專也, 特公諸同好。

後記: 姪女郁芬參加台南區八十四學年度國民中學數學及自然學科資優學生保送升學高中甄試, 倖獲錄取, 今 (85年) 秋將進台南女中就讀。因見其中數學科試卷有「因式分解 $x^4 - 3x - 2$ 」之題 (參見第參節例二), 爰撰此文, 以資紀念, 並饗讀者。

—本文作者曾任教於台灣大學數學系, 現已退休—