

十地區數學教育課程標準

黃毅英 · 黃家鳴

引言

「相信懷疑『應否教授數學』的人不會太多，但為何而教，教的著眼點在哪裏卻會影響學習的結果與成效」(黃, 1995a, 頁72)。縱然日常施教，不會總是對照著教育目的而為，但教育目的卻能標明課程之取向，產生指導性的作用(黃, 1995b)。以香港近年推出之「目標為本課程」為例，數學科「目標為本課程」本欲強調問題解決、傳意等能力，但又依附八十年代之教學大綱，新瓶舊酒，兩者不能配對，陷於兩難之路(黃毅英、曹錦明, 1997)。其中亦是涉及課程目標與取向不吻合的問題。八十年代的社會環境，勞力與技術密集，數學教學大綱側重數學作為工具而非思維方式乃可想見，然而時移世易，香港的數學課程之重新檢討可以說是迫在眉睫的了。

普及教育實為嶄新的意念，前所未有的全民教育起著目的性之轉移(黃, 1993)。由此引申，課程應作大刀闊斧的修訂是理所當然的(黃, 1995a, 頁72)。踏進九十年代，世界各地紛紛對數學課程作了重整，但與新數學運動截然不同者，基礎數學之內容，可謂萬

變不離其宗，但其定位、取向與著眼點方是最決定性的。所謂「他山之石，可以攻玉」，我們並非要把外國的課程移植過來。然而參考相關地區數學課程中之教育目的，對本地改革實大有可作借鑑之處。本文即以十地區之數學教育目的作比較，檢討其異同，希望藉此得出去蕪存菁之端倪。

本港以其歷史及文化背景，受英、美之影響至大，而鄰近地如中國大陸、台灣、新加坡、日本文化背景較近，亦可舉作參考。此外，澳洲、紐西蘭既受英美影響亦希望尋求其本身特色。上面八地區之外，加上歐陸之德國和香港本身，便是本文的探討對象，我們首先臚列各地所依據之文件及其所標示之目的，再行比較其異同。

英國

英國於一九八二年發表了 Cockcroft 爵士為首顧問團撰寫的「數學在乎」(Cockcroft, 1982) 報告書。在其中衍生了 GCSE(General Certificate of Secondary Education) 考試。及後於一九九一年由國

會通過及頒布了「國家課程」(Department of Education and Science and the Welsh Office, 1991), 數學科並於一九九五年印行了修訂版 (Department of Education and Science and the Welsh Office, 1995)。以出版年份而言, 「國家課程」才應是現行執行之準則, 但它沒有標出數學教育之總目標, 只是臚列各階段各範疇的學習指標。故雖然「數學在乎」與「國家課程」未必有必然關係, 但若考據英國數學教育目標的精神, 恐怕要追溯到一九八二年的「數學在乎」。

英國之「數學在乎」(Cockcroft, 1982) 較側重數學在各領域中之應用, 文中首先指出: 「我們相信, 一般對數學有用的認定乃來自數學能提供一有力、簡潔、不含糊的溝通方式」, 後即續稱: 「教授數學的第二重要者為數學在其他領域中之運用與重要地位。它是物理科與各種工程的基本。它於醫學與生物科學、地理與經濟、商業與管理之應用正續增加; 於工商辦公室與工場運作尤為重要」(頁1)。

至於美國所強調的數學訓練思維的功能, 「數學在乎」(頁2) 即有稍微不同的看法: 「數學常被稱為一個能培養邏輯思維、運算能力與空間想像力之學科。數學當然可提供此等功能, 但其效果卻關乎教些甚麼數學而此等能力亦非數學所獨有; 其他活動及不少學科亦可培養該等能力。故此我們相信這些能力之訓練不能構成必須學習數學的主因。然教師卻應注意數學亦有此等效能」(見黃, 1992, 1996)。譬如一個精通棋藝的學生, 其解題能力及博奕策略不可謂不高, 我們可

不能認為他已學好了數學。故 Howson & Wilson (1986) 便提出「過程」與「結果」必須並重。換言之, 除了著重培養學生發現數學與解難之能力, 讓其經歷發現數學的過程外, 亦著重他們在數學結果、知識和定理之掌握。

美國

美國的數學改革每每給人領先一步的感覺, 而且方向 (與口號) 鮮明。自新數學運動在七十年代偃旗息鼓之後, 美國首先提出「回到基本」(Back to basics) 的想法。全國數學督導員議會並於一九七五年舉出十個基本數學領域, 為所有公民所理應達到的, 計為

- 一、解答在陌生情況之下所產生的數學問題。
- 二、應用數學知識到日常生活裏。
- 三、審察所得到的答案是否合理。
- 四、估計數量、長度、距離、重量等的近似值。
- 五、進行整數、小數、分數和百分率的四則運算。
- 六、認識簡單幾何圖形的性質。
- 七、以公制和英制量度各種分量。
- 八、製作和理解簡單圖表。
- 九、認識概率在預測偶然事件發生的用途。
- 十、認識計算機在社會上的各種用途, 並且知道計算機所能做到的和所不能做到的事情 (NCSM, 1977; 亦見梁, 1980)。

然而, 所謂「基本」, 即國民所需之基本數學, 是僅指數學的知識和技巧, 還是也包含數學之素養和能力呢? 其實十個基本數

學領域中已包含了問題解決 (第一項), 應用 (第二項) 和驗證 (第三項)。美國全國數學督導員議會上承七五年之文件擴而充之, 於一九八九年提出廿一世紀數學重點 (NCSM, 1989), 即為: 問題解決、傳意、推理、應用、結果驗證、估計適當之運算技巧、代數思維、度量、幾何、統計及概率、分數及小數、規律及關係等。從中可以明顯看見由技巧到能力之轉移。其實, 美國早在一九七七年便已提出「學習解決問題是研習教學之主要目的」(NCSM, 1977, p.2), 可以說是美國全國數學教師議會以「問題解決」為八十年代學校數學教育之焦點的先聲 (NCTM, 1980a, 1980b)。

一九八〇年美國全國數學教師議會發表的「行動綱領」(NCTM, 1980a) 提出了對八十年代學校數學的八項要點。即為:

- 一、問題解決為八十年代學校數學之焦點;
- 二、數學基礎能力之定義應包含不僅是計算功能;
- 三、各級數學教程應盡量使用計算機及電腦之威力;
- 四、數學教學之功能與效能應以嚴謹標準評核;
- 五、數學教程與學生學習是否成功, 應在傳統測試之上用更廣闊的測量方法加以評鑑;
- 六、所有學生應學更多之數學並需要有更多選擇、更大彈性之課程以因應學生之不同需要;
- 七、數學教師對自我及同事之要求應有高水平的專業程度;

八、由於對數學的理解對個人及社會已相當重要, 公眾對數學教學之支持應提升到相若的程度。

美國全國數學教師議會於一九八九年發表了「學校數學課程與評鑑標準」(NCTM, 1989), 嗣後又發表了「數學教學專業標準」(NCTM, 1991) 和「學校數學評核標準」(NCTM, 1995) 及一系列的附錄 (addenda series), 其特色為不只是有文件性大綱與教學範圍, 更提供了不少有效與切實的教學建議。但若要考其背後之教育目的, 或應探視埋下伏線之「人皆在乎」(NRC, 1989) 和後來有進一步闡釋的「學校數學之重整」(NRC, 1990)。

「人皆在乎」特別提出「在傳統上, 美國學校的設計乃在於擔當雙重的任務: 教以所有學生在工農業經濟中一生所需的基本技巧及透澈地培育少數精英能升上大學到最後步進專業行業者。... 工作性質之轉變使延續教育變成成年人的終身現實。故此, 學校應提供所有學生終身學習的鞏固基礎...」(NRC, 1989, p.11)。

「學校數學課程與評鑑標準」(NCTM, 1989) 承此提出幼兒園至十二級的「新」目標即為:

- 一、他們 (學生) 應當學會重視數學;
- 二、他們建立有能力做數學之信心;
- 三、他們成為數學解難者;
- 四、他們學會以數學方式溝通; 及
- 五、他們以數學方式理解。

精英年代假設挑選出來的都是社會精英, 以數學教育而言, 則是未來專攻數理科的

學生。故以新數學運動而言，學科內容是最重要的：要讓學生在最短時間內接觸數學的前線。「在普及教育下，學生的能力及性向才佔決定性的地位」(黃 1995a, 頁 70)，配合學生在未來社會中生活為至要。這並不表示把教育目的改轍換轍，而是顯示一種考慮範圍之擴大，猶如《學校數學之重整》「擴展中之目的」所言，「我們教授數學期以達到幾個甚為不同之目的，以反映數學於社會中所扮演的多元化角色：實用目的——協助個人解決日常生活的問題；公民目的——讓公民能智性地參與公民性活動；專業目的——為學生將來的職業與專業作準備；文化目的——延續人類文化的主要部份」(NRC, 1990, p.7)。

台灣

台灣於一九六八年實施普及教育。小學方面，曾在一九七五年進行修訂(中華民國教育部國民教育司, 1993)，中學則於七三年、八三年、八五年作了修訂(中華民國教育部國民教育司, 1994)。鑑於「近十餘年來，時代與環境丕變，社會與文化轉型，民國七十六年(筆者按：即一九八七年)解除戒嚴之後，政治民主化、經濟自由化、社會多元化、文化中國化，凡此現象呈現劇變。教育為一切建設之基礎，如何因應變遷與教育發展需要」，中小學於一九九二年開始修訂(中華民國教育部國民教育司, 1993, 頁 346)。新修小學課程最後於一九九三年頒布(中華民國教育部, 1993; 中華民國教育部國民教育司, 1993)，中學課程則在一九九四年頒布(中華民國教育部國

民教育司, 1994)。其中標明以未來化(應具前瞻導向)、國際化(應有世界胸懷)、統整化(應求周延有效)、生活化(應符合生活需求)、人性化(應以學生為中心)及彈性化(應重師生自主)為基本理念(中華民國教育部國民教育司, 1993, 頁 348-349)。

新修之小學教育目標如下：

「國民小學數學教育目標，在於輔導兒童從日常生活經驗中，獲得有關數學的知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度及能力。茲分述如下：

- 一、養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，並透過了解及評鑑別人解題方式的過程，進而養成尊重別人觀點的態度。
- 二、養成從數學的觀點考慮周遭事物，並運用數學知識與方法解決問題的能力。
- 三、培養以數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神。
- 四、養成在日常生活中善用各類工具從事學習及解決問題的習慣。(中華民國教育部國民教育司, 1993, 頁 91)

文件中更比較了新舊課程的要點。以數學科而言，是要配合社會的需求(包括社會趨向民主自由，科技快速轉型)、落實學生為本觀點和強調問題解決(中華民國教育部國民教育司, 1993, 頁 373-374)。

新修之中學教育目標如下：

- 一、引導學生認識數學在生活中的功用，以提高學習的興趣。
- 二、輔導學生獲得數、量、形的基本知識與技能，以提升數學素養。

三、培養學生運用數學方法解決問題的習慣與能力。

四、啓發學生思考、推理與創造的能力。

五、培養學生主動學習的態度及欣賞數學的能力。

這次（一九九三年）中學課程的修訂，首次增加選修部份，總目標與主修部份相同，文件中更標明實施重點如下：

- 一、教學過程透過引導與啓發，使學生能在問題情境中，形成解決問題所需的數學概念、過程、技能和科學態度。教師應避免過早提出解題方法及結論，且不宜作機械式的解題訓練。
- 二、數學教學應依學生個別差異，設計教學活動，鼓勵學生主動參與，培養完整的學習成就感，並啓發其學習與研究數學的興趣。
- 三、數學教學應幫助學生了解並活用數學解題的過程方法運用思考，避免強調零碎知識的背誦或記憶。
- 四、教學應強調用數學語言或方法培養批判與精確客觀的精神。
- 五、教學應提供學生交互討論之機會，以發展其欣賞他人觀點之態度。
- 六、選修數學每學期的教材中，宜包含可供教師進行探索式教學的題材。
- 七、必修數學課程中，因教學節數的限制而未能深入探討的題材，可考慮安排在選修數學課程中。
- 八、在適當的教學單元，可因應個別差異使用電算機具作為輔助教學之工具（中華民國教育部國民教育司，1993，頁853）。

以目標而言，小學部份明顯強調建構數學概念、解決問題、溝通、批判等能力，而淡化原先課程的側重數、量、形（中華民國教育部教育司，1975）；中學部份，則特別提出數學素養（第二條：原先為「以為日後研究之基礎」）和主動學習態度及欣賞數學能力（第五條），其他目標不變（中華民國教育部國民教育司，1985，頁119）。

至於高中數學教育目標則為如下：

- 一、素養方面：了解數學的一般內容、方法與意義，以為立身於現代社會所需的基礎素養。
- 二、訓練方面：熟悉以數、量、形與函數為中心的題材，增進基本的數學能力，並激發潛在的創造力。
- 三、應用方面：了解數學具有描述自然與社會現象的功能，以備應用於實際生活與各種科學（中華民國教育部國民教育司，1983，頁119）。

中國大陸

大陸在「文革」結束後，國家教委於一九七八年即頒布「全日制中學數學教學大綱」（中華人民共和國國家教育委員會，1978）。隨後，十三院校即出版「教材教法」，由人民教育出版社出版，以闡釋新大綱之精神及提供不少教學建議（十三院校協編組，1980）。「教材教法」於一九八七年再版（高等教育出版社，1987），作了普及教育開展後應有的調整（黃，1993）。為配合義務教育之推行，國家教委於一九九二年再頒布新的中小學大綱（中華人民共和國國家教育委員會，1992a，1992b）。

中國大陸的數學課程早在一九五二年便提出「雙基」(基礎知識及基本技能)之要求,在一九五六年第一次將培養能力列為教學的總目標。到一九六三年版,明確地提出「運算、邏輯思維、空間想像」等「三種能力」(蘇, 1991, 頁 188-189)。到一九七八年版,則將「三個能力」與問題解決連結一起標出,如云:

「中學數學教學的目的是:使學生...具有正確迅速的運算能力,一定的邏輯思維能力和一定的空間想像力,從而逐步培養學生分析問題和解決問題的能力」(中華人民共和國國家教育委員會, 1978)。一九九二年頒佈的義務教育數學大綱(中華人民共和國國家教育委員會, 1992a, 1992b)明顯地配合了普及教育的新形勢,包含了更廣泛的教學目標。其中,中學大綱特別指出「發展思維能力是培養能力的核心」,並舉出一些一般的、非數學獨有的教學目標(黃, 1993a)。

在九二年大綱頒佈後,中國大陸並沒有如一九七八年般隨即印行教材教學法,反而更實質地用教材體現大綱的精神,並首次推行「一綱多本」的政策(盧, 1993)。在一個大綱之下,按國家教委一九八八年教材規劃中提出,出版人民教育出版社、北京師範大學、東北師範大學、廣東省(沿海版)、上海、浙江、河北、四川等八套教材。

未來還有「多綱多本」之可能,照顧個別差異。值得注意的是,中國大陸及台灣的課程均容許一個試行期,從研究及實際施教中進一步調節課程。

一九九二年頒佈,「九年義務教育全日制小學數學教學大綱」(中華人民共和國國家教育委員會, 1992a)所標示的教學目的為:

- 一、使學生理解、掌握數量關係和幾何圖形的最基礎的知識。
- 二、使學生具有進行整數、小數、分數四則計算的能力,培養初步的邏輯思維能力和空間觀念,能夠運用所學的知識解決簡單的實際問題。
- 三、使學生受到思想品德教育。(頁 1-2)

於教學要求中,有如下的進一步闡釋:

「結合有關內容的教學,培養學生進行初步的分析、綜合、比較、抽象、概括,對簡單的問題進行判斷、推理,逐步學習有條理、有根據地思考問題;同時注意思維的敏捷和靈活」(頁 2)。

「九年義務教育全日制初級中學數學教學大綱」(中華人民共和國國家教育委員會, 1992b)教學目的如下:

「初中數學的教學目的是:使學生學好當代社會中每一個公民適應日常生活、參加生產和進一步學習所必需的代數、幾何的基礎知識與基本技能,進一步培養運算能力,發展邏輯思維能力和空間觀念,並能夠運用所學知識解決簡單的實際問題。培養學生良好的個性品質和初步的辯證唯物主義的觀點。」

在闡釋「三個能力」後,續云:

「能夠解決實際問題,是指能夠解決帶有實際意義和相關學科中的數學問題,以及解決生產和日常生活中的實際問題。在解決實際問題中,要使學生受到把實際問題抽象成數學問題的訓練,逐步培養他們分析問題和解決問題的能力,形成用數學的意識。」並特別指出,「數學教學中,發展思維能力是培養能力的核心。」

其中更進一步標示了一些非數學獨有之目的：

「良好的個性品質主要是指：正確的學習目的，濃厚的學習興趣，頑強的學習毅力，實事求是的科學態度，獨立思考、勇於創新的精神和良好的學習習慣。

「初中數學中的辯證唯物主義教育因素主要是：數學來源於實踐又反過來作用於實踐的觀點；數學內容中普遍存在的運動變化、相互聯繫、相互轉化等觀點。」

中國大陸剛於一九九六年頒布高中數學課程。詳見中華人民共和國國家教育委員會(1996)。

香港

香港於一九九四年頒布「目標為本課程」，其數學科之總目標為「通過學習數、度量、代數、圖形與空間及數據處理的知識、概念及技巧/程序，增強探究、傳意、推理、建立與解答數學問題、欣賞數學及在多方面應用數學的能力」(香港課程發展議會，1994a)。

然而在訂定學習目標時，提出「現有的中小學數學科課本應可供教師及學生繼續使用」(香港課程發展議會，1992，頁11)，故除了為中小學部份的銜接作了一些調整外，數學科「目標為本課程」(起碼在學習目標和內容而言)，基本上是依據現有香港課程發展委員會小學及中學數學科課程綱要而訂定的(黃毅英、曹錦明，1997)。

現行沿用的小學和中學數學課程綱要分別是一九八三年和八五年的版本(香港課程

發展委員會，1983，1985)。嗣後只作過一些小修改。其中，「整個(小學數學)課程之目的是：1. 引起兒童的創造力；2. 啓發兒童的數學思考，培養兒童的創造能力；3. 教授基本的數學概念及計算技巧，為中學的數學及科學的學習奠好基礎；4. 讓兒童學習運用數學解決日常生活中的問題；5. 誘導兒童對數和圖形的規律及結構的欣賞」(課程發展委員會，1983，頁11)。

中學數學課程目的如下：

1. 繼續發展學生在小學階段經已獲得的計算能力——包括四則運算、近似值的應用、百分法、率、比及簡易量度；
2. 使學生有能力了解數學在日常生活中的應用——例如統計學及概率的基本知識；
3. 透過以下的學習，使學生具有良好的基礎，以便繼續深造。
 - 學習數學符號的使用及運算，
 - 發展使用基本邏輯規律及推理方法的能力，
 - 介紹所需的數學技巧(例如三角函數等)；
4. 使學生了解數學的規律及功用，尤其在應用方面和文化傳統上的涵義。
在中四及中五階段，目的更包括：
5. 強調數學的本質及應用；
6. 使學生具有完整的數學基礎，適合升讀中六數學的需要。(但中六課程絕不應在中四或中五階段教授)。

上述目的，顯示出本課程其中的一個重點，就是將數學作為應用工具，多於 [1] 作為一種思維方法」(課程發展委員會，1985，頁5)。

課程發展委員會於一九八四年出版的「品德教育參考資料(2)」中進一步闡釋數學在德育中之作用：

「數學科在培養學生良好品格方面，頗有幫助。茲列舉數點，分述如下：

- (一) 培養實事求是的態度。
 - (1) 教導學生客觀地及從多方面去考慮問題，而非主觀地妄下結論。
 - (2) 從數學的發展史了解到事情往往不是一蹴而就（意即一蹴可幾），是要通過「嘗試—找尋錯誤與失敗的原因—再嘗試」的途徑不斷努力，才會成功。
- (二) 訓練學生做事要有條理，按部（筆者按：原文作「步」）就班。
- (三) 培養學生的邏輯性思維能力。
- (四) 教導學生通過觀察與探索去發現規律，再用邏輯去證明其真確性。
- (五) 訓練學生做事要有恒心及耐性。
- (六) 就地取材，因事制宜，在數學課進行道德教育。例如在教「統計學的應用及誤用」一課時可指出部份不肖廣告商利用統計學誤導消費者，學生應提高警惕」（課程發展委員會，1984，頁16）。

日本

日本的教育制度及課程由文部省統籌，其中一項主要任務是頒布「學習指導要領」並每隔約十年修訂一次。最新版為一九八九年頒布者，並在一九九二、一九九三及一九九四年分別於小學、初中及高中實施（Fuji, 1993）。

一九八九年日本文部省「小學校學習指導要領」(文部省, 1989a) 中，提出小學算術之學習目標為「學習關於數量及圖形的基礎知識及技能，培養對日常事物的分析能力，理解數理分析的優點、從而培養一種應用以上知識和技能於日常生活之態度。」在「中學校學習指導要領」(文部省, 1989b) 中，初中數學學習目標為「協助兒童建立以深入及以數學考察日常事象的能力，獲得數、量、形的基礎知識與技巧，進而建立活用數學之態度」。至於高中目標則為「讓學生深入了解數學之基本概念，處理及法則，建立以數學考察及處理事象之能力，欣賞以數學認識及思維，進而積極活用上述能力」(文部省, 1989c)。

以這些規定的數學學習目標而論，值得注意的是他們強調「培養對日常事物的分析能力」與「培養一種應用（數學）知識和技能於日常生活之態度」（馬雲鵬、孫連舉，1995）。學生不僅要掌握有關的數學知識，而且還得學習運用這些知識於認識及分析生活周遭事物，可以說是培養「數學化」（Mathematization）的能力與利用數學觀點解決具體問題的基本態度，這兩方面均是數學教育面對科技資訊社會應有的目標。

新加坡

新加坡於一九六〇年引入新數學，從一九六五年起，小學與初中遵循統一之課程，高中才分開 B、C 兩個選修課程，其中課程 C 有較多新數之部份。自一九八一年起，又引入加速之課程 D。新加坡中學的終結考試為「新加坡 - 劍橋」一般教育文憑普通程度考

試 (Singapore-Cambridge General Certificate of Education Ordinary Level Examination: GCE O Level) (Cheung & Chong, 1993), 故考試範圍主要是依據英國式的考試。然新加坡課程計劃科則有頒布教學大綱 (Curriculum Planning Division, 1990a, 1990b)。

新加坡的中小學數學教育之目標是一致的 (Curriculum Planning Division, 1990a, 1990b), 如云:

中小學數學教育之目的是讓學生

- 獲得所需的數學知識和技能, 發展思考過程並應用於生活中遇到的數學處境;
- 以數學傳意;
- 建立對數學之正面態度和個人成功感; 及
- 欣賞他們周遭世界數學之重要性和威力。

澳洲

澳洲教育局課程處於一九九〇年頒布了「國家數學聲明」 (Australian Education Council, 1990), 後來又頒布了兩個輔助文件 (Australian Education Council, 1994a, 1994b)。在列舉課程綱要之前用了三個章節詳述學校數學的原則。第一章為「數學的重要性」; 第二章為「學校教學之目標」; 而第三章則為「增進數學學習」。

在第一章中, 臚列了甚麼是數學、數學何以如此重要及數學對誰重要三節, 第二章便列出 (並詳釋) 了以下的六個學校數學之目標:

- 一、學生應建立處理日常事務之信心與能力;
- 二、學生應建立對數學之正面態度與投入;
- 三、學生應建立以數學獨自及合作解難的能力;
- 四、學生應學會如何以數學溝通;
- 五、學生應學會反映現代數學之技巧與工具; 及
- 六、學生應得到數學發展過程之經歷。

紐西蘭

紐西蘭教育局亦於一九九二年頒布其「國家課程」:「紐西蘭課程之數學」 (Ministry of Education, 1992)。其中標出數學教育之目的為:

- 一、讓學生建立對數學價值及用途之信念、培育其對本身數學能力之信心、引發自我成就感、並激勵對數學不斷產生之興趣;
- 二、建立學生之技能、概念、理解、態度以達到處理日常數學之信心;
- 三、讓學生建立數學解難的多樣方式及建立以邏輯理解之能力;
- 四、讓學生於科技化及資訊豐富的社會中不致「數盲」或「統計盲」;
- 五、提供於其工作環境中所需之數學工具、技能、理解與態度;
- 六、提供將來於數學及以數學為重心之各學科進修的學生必須之基礎; 及
- 七、引發及培養數學專才。

德國

聯邦德國的教育事務根據其基本法「文化主權」規定分屬各州 (Land) 制定及執行，由各州文化部負責，因此各州都有其獨立之學校制度及課程。1990年東西德合併之後，前東德原有以國家統一教育制度和課程亦在所屬之五州漸次分化 (Bungartz & Sträßer, 1992)。德國的初等教育由一至四年級 (柏林例外：小學共六年)，而中等教育階段由五年級開始，至10至13級不等，學生會按成績、特長、愛好及教師、家長的意見而分流至主要三類不同之中學：普通中學 (Hauptschule)、實科中學 (Realschule) 和文理中學 (Gymnasium)。另外還有第四類綜合中學 (Gesamtschule)，是前三者之結合，但數量佔很少比重 (李昌芳、梁翠英, 1994; Hawson, 1991)。各類中學可以選讀的科目和課程，均有不同。由於各州課程相異，各類中學亦有不同的科目和學習內容，要綜觀德國數學課程目標並不容易。在此我們以西南部的巴登 - 符騰堡州 (Baden-Württemberg) 作為例子，以說明各級學校之數學教育目標 (Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg, 1994)。該州為海德堡大學之所在地，傳統上對教育極為重視。

以小學數學教育來說，在於促進兒童概念思考的能力，使其獲得基本算術運算的知識及技能，協助兒童建立空間直覺能力及想像力。通過數學學習，兒童對環境更有意識地觀察，加以排列、分類，並邏輯地、批判地進行思考。具體來說，包括以下目標：

- 對環境事物以數學方式理解和描述
- 獲得基本的數學技能
- 發展解決數學難題之技能
- 應用度量知識於不同的處境
- 認識、製作及描述各基本幾何圖形
- 認識空間、位置之關係及運用於定向
- 獲取對數字的概念、組合及數量關係的理解
- 建立空間概念
- 建立對數學的正面態度

至於中學階段，各類中學的目標重點有所不同。入讀普通中學的學生學業成績平平，數學學習旨在鞏固及發展學生在基礎運算方面的知識和技巧，作為學習數的範疇、實用計算及代數的基礎。此外，建立空間思考能力，使獲得基本的幾何經驗，系統地認識及運用。數學學習更適合於促進抽象思考能力，訓練邏輯思維，激發創造性想象及培養解難題耐力。數學學習應使學生能夠運用數學知識和能力於其他科目及環境事物之課題上，同時對數學方法的局限應明確認識。透過接觸數學，學生亦認識有關之傳統文化內容，他們對數學課題的樂趣及興味皆得到激發及維持。

在實科中學，數學科有必要提供一個良好的數學基礎，以配合將來職業及升學所需。學生對數學思考及運算亦要熟識，以利用數學模型描述及從數量方面掌握環境事物的狀態和過程。數學學習亦可發揮學生能力，對學生之發展有重大意義。學生應學習觀察，尋求規律、排列、分類、概括、詳細說明、組合及變化，以促進創造性之直觀思考，此乃數學重要特徵之一。學生亦應學習搜集數據，進行

實用運算、量度、估計、粗算、作圖、詮釋結果等。學生亦理解數學的應用性，從而對環境事物進行問題建立、處理及符合目的之決定，不過也應認識數學方法的局限，邏輯分析及綜合。接觸數學難題可以促進一般解難的能力，同時亦可發展精確、可靠、謹慎及耐力。學生亦學習理性地論證，其中包括認清條件、定義、系統表述、提出理據、分析及核實陳述。

至於文理中學，較重傳統學術訓練，簡單來說，數學可以培養在複雜環境中思考定向及判斷能力。數學課必須給予學生真實的數學經驗，使其認識數學之效用及豐富之內容關係。個別目標包括：對數字的特質、數量關係及規律的認識，掌握基本的算術、代數方法及幾何作圖，發展空間直覺能力，認識及用基本的數學概念及定理，瞭解問題，尋求解題方法及認識不同解題步驟，發現數學關係及其運用（亦包括在變動方面），實際處境之數學化及對數學運用結果之詮釋，認識及描述因果關係網絡中的依存關係，可能之互動及對因果關係之思考，對思考過程、計算及程序所得之結果作批判性的比較，核實及提出富責任感之判斷，適當地利用公式手冊、數表及計算機，在不同的應用範疇明智地利用計算機。

以上所列雖是一州之數學課程目標，但亦可略窺德國數學教育課程目標的一些特色。

各地數學教育目的之共通點

綜觀各地區數學課程所標示之目的，可謂非常接近，我們大可以抽出以下一系列的字眼：運算能力、邏輯思維能力、空間觀念、

問題解決能力、正確的學習目的、濃厚的學習興趣、頑強的學習毅力、實事求是的學習態度、獨立思考、勇於創新、良好的學習習慣（中國大陸）、欣賞數學的能力（台灣——有重覆者不述，下同）、為未來學習奠定基礎、思考與推理能力、解決日常生活問題、規律與結構、應用於其他學科（香港）、有條理的做事方式、觀察與探索、恒心與耐性（香港「品德教育參考資料」）、傳意、建立（香港「目標為本課程」）、連繫、數字感、符號感、度量感（英美）、統計的意識（紐西蘭）。若以基礎教育階段而言，各地目的更加相近。

受到清代文學家袁枚所提「才、學、識」的啓發，陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）指出，無論各地區如何將數學課程闡述，其目標亦大致可歸入（1）實用知識、（2）學科知識、（3）文化素養（NCTM, 1970; 亦見蕭文強, 1983; Siu, Siu, & Wong, 1993）。

在香港，於一九九四年展開的課程發展議會與考試局數學等科委員會聯席會議中（詳見黃, 1995b），便綜合以上觀點而提出「數學教學之目標在於讓學生浸淫於如下的一個數學學習環境——

- 一、在其中能養成積極和有效的學習習慣，使得其能閱讀及懂得如何提取知識；能清楚地寫及講以求表達其意念及與人溝通；能思考、提問、質疑及進行探索。
- 二、能獲得一手之數學經驗以認識數學既為準確科學亦為具想像力之工作，既為抽象的智性追求亦為具有實際生活應用之具體學科之雙重本質；以達致數學之美，其意義所在、其力量與其局限性。」

其中，實用目的包括了 (1) 以數學方式解決日常生活遇到的問題，(2) 提供將來大部分職業所需的數學訓練，(3) 為將來升讀理科及有關學科所需的數學奠下基礎。

學科目的包括了 (1) 數字、符號及其他數學對象的運算能力，(2) 數字感、符號感、空間感、度量感及結構與規律之意識，(3) 推理與邏輯思維，(4) 以數學構作與解決問題之能力，(5) 以數學方式表達及傳遞意念。

文化目的包括了 (1) 欣賞數學之美及 (2) 認識古今數學在各地文化中之角色及與其他學理關係。

各地數學教育目的相異之處

既然各地數學教育之標準大致相同，實可綜合而成一各地適用之一套數學學習之目的。事實上，數學作為科學之語言有其一定之共通性。然而在大同之中，亦可以找出小異之處的。

從香港數學科「目標為本課程」中可以看到，其總目標可以分作兩部分。前者（「通過學習數、度量、代數、圖形與空間及數據處理的知識，概念及技巧/程序...」）五個範疇是現有課程中的教學內容，後者（「...增強探究、傳意、建立與解答數學問題、欣賞數學及在多方面應用數學的能力」）則為「目標為本課程」所標示和強調的五種能力轉到數學科的引申（香港課程發展議會，1992，頁12）。「目標為本課程簡介」（香港教育署，1994）後統一稱傳意、探究、構思、推理和解決問題為「五種基本、互相關連而且跨課程的學習、思考和運用知識的方法」（頁12）（亦見黃毅英、

曹錦明，1997）。再看美國十三個小學數學課程標準中，即（利用數學作解題工具、利用數學作傳意工具、利用數學作推理工具、數學的聯繫、概算法、數的概念及讀數法、整數運算的概念、整數計算、幾何及空間概念、度量、統計及概率、分數及小數、規律及關係），其中有九個是直接以課題（學習內容）劃分的，至少前四個是涉及「能力」。至於美國國家數學督導員議會（NCSM，1989）提出的「廿一世紀的數學重點」則舉出了問題解決、傳意、推理、應用、結果驗證、估計、適當之運算技巧、代數思維、度量、幾何、統計、概率十二項，也是包括了「過程」（process；或 Bell，1978，p.223 所稱之間接學習目的）和數學「結果」（product；或 Bell，1978，p.223 所稱之直接學習目的）兩方面。當然，這種劃分只為方便討論而言，而實際施教時，不只應如「數學在乎」（Cockcroft，1982）中所指出的兩者並重，更應如黃（1995a）中所指出，「能力」亦實難抽離「內容」割裂地培養的，問題在於「怎樣在教授數學知識之同時，以之作為培養深層能力的基礎」（黃1995a，頁71）。

從這個分野出發，很明顯可以見到某些地區的數學教育目的是較著重「過程」，而在另一些地區中，「結果」所佔的比重是較高的。若以有劃分學習領域的地區作比較，便可得出下頁之表（觀黃淑英、林智中，1997）。

這些分別，又可能與以下的課程發展背景有非直接但甚微妙的關係：

我們可以留意到，東方地區，以台灣、中國大陸、香港、日本、新加坡而言，它們擁有一官定的、統一的課程是有著悠久歷史的。而

「西方」地區如英、美、澳紐等一向並未有統一的課程，因此東方與西方二者以往的課程發展路向可以說是恰恰相反的。

以英國之製訂國家課程及美國之製訂課程標準為例，它們之目的，大抵在各州各省各校之自由發展到了散亂的邊緣，來個約束和作個有限度的指引。東方地區則一向都有統一課程而且遵循甚嚴，若西方由鬆到緊，東方又圖作效顰豈不變成緊上加緊？這種統一性是否與文化背景、個人或群體主義、考試取向等有關，仍待進一步探討，不宜早下結論。

若一個地區是要求較嚴格的統一性，無論教學大綱、教材（教科書）或考試要求（如：有無備受重視的全國/地區性統一的考試等），則不宜作太空泛抽象的條文可以想見。於是無可避免地這些地區每每著眼較具體之學習內容（甚至編排節數）和學生實質的表現（performance）等。

我們重申無意將「結果」與「過程」區分，然而存在全國性執行的課程卻可能是東方地區數學課程較偏重於學習內容的原因之一。

結論

如前所述，實際的日常教學的備課，未必會總是對照著宏觀的目標進行。但這些教育目的卻能產生指導作用。在教材取捨、教學重點與手法中，均應有直接之影響。

從各地區數學教育目的之探視，我們看到學習數學的共同意義和在新時代中更廣義

和擴展中之教育目的。從大同中之小異，我們進一步摸索了東西地區以其文化背景之不同，其課程發展的不同路向。從這點也許能帶給我們一些啓示。

西方地區本來沒有劃一的課程，近年趨向多元中之統一，使課程不致過於散亂。然而東方地區本來就有一個統一課程的，假若進一步地仔細釐定每一學習階段之學習內容，不只費時失事，且有把課程變得支離破碎之可能。這是「目標為本課程」的發展路向及更一般的「進口課程」所須深思的。東方地區課程所欠缺的，可能是多元性、個別化、機制上之彈性和過程能力之著重。只有這樣，才能統攝一些如問題解決、分析、自學等能力之建立，並且包括排序、類比、規律尋找、掌握關鍵、御繁於簡等數學思維方式和非數學科獨有之教育目的，這是配合高科技社會中技能性操作轉向內在能力之需要（黃，1995a，頁70）。中國大陸「一綱多本」的做法可能是東方地區課程發展中一個應走之路向和值得探索之構思。這種路向自然要以淡化考試中「統一性」的元素而加強真正對學習之回饋。縱以小地方的香港而言，若斤斤計較公開試之統一性，學校與學校間自然對選用風格不同的教科書有所卻步、更遑論相異的課程了。然而隨著考試篩選作用之衰減，這也許是轉變的時機（黃，1995a）。此外，教師自主和機制上之彈性乃為不可或缺，好讓教師可因應個別差異和學生回饋即時作調節（黃毅英、曹錦明，1997）。

美國(小學)	英國	香港(目標 為本課程)	澳洲	紐西蘭	台灣
利用數學作解題工具 利用數學作傳意工具 利用數學作推理工具 數學的聯繫 規律及關係	使用應用數學		態度及鑒賞 選擇及應用 數學 數學探究	數學過程	
概算法 數的概念及讀數法 整數運算的概念 整數計算 分數及小數 幾何及空間概念 度量 統計及概率	數 代數 圖形與空間 數據處理	數 代數 圖形與空間 度量 數據處理	數 代數 空間 度量 概率與數據	數 代數 幾何 度量 統計	數的概念 代數 平面幾何 坐標幾何 資料整理 與概率

在社會上立身處世，要出人頭地的想法，在儒家社會中強化了考試的壓力。家長望子成龍的心態不斷鞭策著學生在「教育階梯」中爬升(Ho, 1986)。競爭性與互相比較成為了東方社會中學習的原動力。然而隨著學位增多與考試篩選功能的衰減，學習應有更多照顧自我完善的空間(黃, 1995a)。華人地區教育確有不少獨特之處，若能輔以佛教覺性(awareness)的思想，補其不足，當可把教育理想發揮得更淋漓盡緻(張奠宙, 1993; 蓮華, 1994)。

總的來說，目的之重新釐定固然起著指

導作用，然而僅是調整目的不足以推動課程之變革。我們必須把目的具體化、滲透到各個環節上來。對教育目的之探視只是一個開端，此後亦要進一步考慮如何在課程中體現這些目的。

附註 [1]: 原文中文版作「... 而並非僅作為一種思維方法」，即在思維方法之上還有工具之角色；但參看英文版則沒有「僅作」之含意，即不把數學看待成思維方法，只看成爲應用工具。今從英文原文理解。

參考資料

1. 十三院校協編組 (1980),「中學數學教材教法總論」,北京:人民教育出版社。
2. 十三院校協編組 (1987),「中學數學教材教法總論 (第二版)」,北京:高等教育出版社。
3. 文部省 (1989a),「小學校學校學習指導要領」,東京:作者。
4. 文部省 (1989b),「中學校學校學習指導要領」,東京:作者。
5. 文部省 (1989c),「高等學校學校學習指導要領」,東京:作者。
6. 中華人民共和國教育部 (1978),「全日制十年制學校數學教學大綱 (試行草案)」,北京:人民教育出版社。
7. 中華人民共和國國家教育委員會 (1992a),「九年義務教育全日制小學數學教學大綱」,北京:人民教育出版社。
8. 中華人民共和國國家教育委員會 (1992b),「九年義務教育全日制中學數學教學大綱」,北京:人民教育出版社。
9. 中華人民共和國國家教育委員會 (1996),「全日制普通高級中學數學教學大綱」,北京:人民出版社。
10. 中華民國教育部 (1993),「國民小學課程標準」,台北:台捷國際文化。
11. 中華民國教育部國民教育司 (1975),「高級國民中小學課程標準」,台北:正中書局。
12. 中華民國教育部國民教育司 (1985),「國民中學課程標準」,台北:正中書局。
13. 中華民國教育部國民教育司 (1993),「國民小學課程標準」,台北:正中書局。
14. 中華民國教育部國民教育司 (1994),「國民中學課程標準」,台北:正中書局。
15. 李昌芳、梁翠英 (1994),「當今德國教育概覽」,鄭州:河南教育出版社。
16. 香港教育署 (1994),「目標為本課程簡介」,香港:政府。
17. 香港課程發展委員會 (1983),「小學課程綱要—數學科」,香港:教育署。
18. 香港課程發展委員會 (1984),「品德教育參考資料 (2)」,香港:作者。
19. 香港課程發展委員會 (1985),「中學課程綱要—數學科」,香港:教育署。
20. 香港課程發展議會 (1992),「數學科學習目標 (初稿)」,香港:教育署。
21. 香港課程發展議會 (1994a),「目標為本課程:數學科學習綱要 (第一學習階段)」,香港:教育署。
22. 香港課程發展議會 (1994b),「目標為本課程:數學科學習綱要 (第二學習階段)」,香港:教育署。
23. 馬雲鵬、孫連舉 (1995),中日小學數學教育的初步比較分析,「東北師大學報 (哲學社會科學版)」1995年增刊, 93-100。
24. 張奠宙 (1993),華人地區數學教育的成功與不足,於林智中、黃顯華、馮以泮 (編)「東南亞地區華人社會的課程改革—二十一世紀的挑戰研討會論文集」,93-95,香港:香港中文大學課程與教學學系。
25. 梁鑑添 (1980),評論近二十年來中學數學課程改革,「抖擻雙月刊」38期, 54-57頁,重刊於蕭文強 (編)「香港數學教育的回顧與前瞻」內, 31-55,香港:香港大學出版社。
26. 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強 (1994),教無止境:數學「學養教師」的成長,於林智中、韓孝述、何萬貫、文綺芬、施敏文 (編)「香港課程改革:新時代的需要論文集」,53-56,香港:香港中文大學課程與教學學系。
27. 黃毅英 (1992),九十年代的數學教育,「數學傳播」64期, 78-87。
28. 黃毅英 (1993),數學教育目的性之轉移,「數學傳播」67期, 73-75。
29. 黃毅英 (1995a),普及教育期與後普及教育期的香港數學教育,於蕭文強 (編)「香港數學教育的回顧與前瞻」內, 69-87,香港:香港大學出版社。
30. 黃毅英 (1995b),香港數學課程改革:迷失於十字路口?「香港數學教育:轉變的時機?」專題研討發表論文,香港:香港中文大學,1995年5月13日。

31. 黃毅英 (1996), 數學課程改革之路向, 「數學傳播」79期, 51-79。
32. 黃毅英、林智中 (1997), 目標為本課程的學習評估, 於林智中 (編) 「目標為本課程: 設計與實施」, 135-158, 香港: 天地圖書。
33. 黃毅英、曹錦明 (1997), 評論數學科目標為本課程的設計, 於林智中 (編) 「目標為本課程: 設計與實施」, 21-42, 香港: 天地圖書。
34. 蓮華 (1994), 儒家體系教育的成功與不足, 於蓮華 (編) 「教而後知不足」, 85-89, 香港: 廣角鏡出版社有限公司。
35. 蘇式冬 (1991), 「中學數學教學研究」, 廣東: 廣東教育出版社。
36. 蕭文強 (1983), 數學、數學史、數學教師, 「抖擻雙月刊」53期, 67-72。
37. 盧江 (1993), 普及義務教育與初等教育數學課程的改革: 談中國小學數學課程教材改革現狀, 於林智中、黃顯華、馮以泮 (編) 「東南亞地區華人社會的課程改革: 二十一世紀初的挑戰國際研討會論文集」, 127-129, 香港: 香港中文大學課程與教學學系。
38. Australian Education Council (1990), A National Statement on Mathematics for Australian Schools, Carlton, Vic, : Curriculum Corporation.
39. Australian Education Council (1994a), Mathematics-A Curriculum Profile for Australian School, Carlton, Vic: Curriculum Corporation.
40. Australian Education Council (1994b), Mathematics-Work Samples, Carlton, Vic: Curriculum Corporation.
41. Bell, F, H, (1978), Teaching and Learning Mathematics, Iowa: Wm C Brown Co.
42. Bungartz, P., & Sträßer, R, (1992), The role of mathematics in educational policies: Germany, IDM Occasional Paper 138, Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
43. Cheung, J., & Chong, T. H. (1993), Towards Mathematical Excellence in Singapore, In G. Bell (Ed.) Asian Perspectives on Mathematics Education, 122-135, Lismore: The Northern Rivers Mathematical Association.
44. Cockcroft, W. H. (Chairman) (1982), Mathematics Counts, London: HMSO.
45. Curriculum Planning Division (1990a), Mathematics Syllabus: Primary, Singapore: Author.
46. Curriculum Planning Division (1990b), Mathematics Syllabus: Secondary, Singapore: Author.
47. Department of Education and Science and the Welsh office (1991), National.
48. Curriculum: Mathematics for Ages 5 to 16, London: HMSO.
49. Department of Education and Science and the Welsh office (1995). Mathematics in the National Curriculum, London: HMSO.
50. Fujii, T. (1993), Japanese students understanding of school mathematics focusing on elementary algebra, In G. Bell (Ed.) Asian Perspectives on Mathematics Education, 10-86, Lismore: The Northern Rivers Mathematical Association.
51. Hawson, G. (1991), National Curricula in Mathematics, Leicester, England: The Mathematical Association.
52. Ho, D. Y. F. (1986), Chinese patterns of socialization: a critical review, In M. H. Bond (Ed.) The Psychology of the Chinese People, Hong Kong: Oxford University Press.
53. Howson, G., & Wilson, B, (Ed.) (1986), School Mathematics in the 1990s, Cambridge: Cambridge University Press.
54. Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg (1994), Kultus und Unterricht: Amtsblatt des Ministeriums für

- Kultus und Sport Baden- Württemberg, Ausgabe C: Lehrplanhefte 1/1994, 2/1994, 3/1994 und 4/1994, Villingen-Schwenningen, Germany: Neckar-Verlag.
55. Ministry of Education (1992), Mathematics in the New Zealand Curriculum, Wellington: Author.
56. National Council of Supervisors of Mathematics (1977), Position Paper on Basic Mathematics Skills, Washington, D. C. : National Institute of Education, See also Arithmetic Teacher, 25, 19-22; Mathematics Teacher, February, 71, 147-152.
57. National Council of Supervisors of Mathematics (1989), Essential Mathematics for the Twenty-First Century: The Position Paper of the National Council of Supervisors of Mathematics, Washington, D. C. : National Institute of Education, See also Arithmetic Teacher, 37(1), 44-46; Mathematics Teacher, 82, 470-474.
58. National Council of Teachers of Mathematics (1970), A History of Mathematics Education in the United States and Canada (32nd Yearbook), Washington, DC: NCTM.
59. National Council of Teachers of Mathematics (1980a), An Agenda for Action, Washington, DC: NCTM.
60. National Council of Teachers of Mathematics (1980b), Problem Solving in School Mathematics (The NCTM 1980 Yearbook), Washington, DC: NCTM.
61. National Council of Teachers of Mathematics (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.
62. National Council of Teachers of Mathematics (1991), Professional Standards for Teaching Mathematics, Reston, VA: NCTM.
63. National Council of Teachers of Mathematics (1995), Assessment Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.
64. National Research Council (1989), Everybody Counts, Washington, DC: National Academy Press.
65. National Research Council (1990), Reshaping School Mathematics, Washington, DC: National Academy Press.
66. Siu, F. K., Siu, M. K. & Wong, N. Y. (1993), The changing times in mathematics education: The need of a scholar-teacher, In C. C. Lam & Y. W. Fung (Eds.), Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia: Challenge of 21st Century, 223-226, Hong Kong: Department of Curriculum and Instruction, The Chinese University of Hong Kong.
67. Wong, N. Y. (To appear), Recent Development in the Hong Kong Mathematics Curriculum: Anticipating a reform, In G. Bell (Ed.) Review of Mathematics Education in Asia and the Pacific, 1996, Lismore, Australia: The Southern Cross Mathematical Association, Inc.

—本文作者任教於香港中文大學課程與教學學系