

算法化原則與數學教育

徐利治 · 鄭毓信

一. “頭腦編程”與算法化原則

人類社會現正經歷著由工業社會向信息社會的重要轉變，這一變化不可避免地會對人類生活的各個方面產生十分重要和深遠的影響。例如，由心理學研究的現代發展即可清楚地看出這一點。

具體地說，就心理學的現代研究而言，其主要特徵即是認知心理學現已取代行為主義在這一領域中佔據了主導地位。由於認知心理學的基本立場即是把思維活動看成人腦對信息加工的過程，包括信息的獲得、貯存、提取、產生等（正因為此，認知心理學有時就被稱作“信息加工心理學”），因此，認知心理學在現代的興起事實上就可被看成信息社會的一個必然產物。

特殊地，就人類社會向信息社會的轉變而言，我們當然又應特別注意計算機技術的迅速發展和廣泛應用所造成的巨大影響，而後者事實上就是促成這一轉變的一個最為重要的因素。也正是從這樣的背景去進行分析，筆者以為，“頭腦編程”等思想的提出就十分自然了。

所謂“頭腦編程（程式化）”（mental programming），籠統地說，即是認為我們可以通過與計算機的類比來理解人類的思維活動和智力水平：“天生每一個正常人的頭腦，都像一個同類微型計算機的硬件，並無功能上太大的差別，但後天環境的影響，... 卻像編制了特殊程度的軟件，使頭腦這個微型計算機的功能大大增加，... 而也因此顯示出個體的差異。”（[1]，第166頁。）從而，在持有這種觀點的人看來，智力的發展就可以被歸結為如何通過學習和教育（包括所謂的“自我激發”）來實現所說的“頭腦編程”。

聯繫數學領域中的具體事例來進行分析，筆者以為，上述關於“頭腦編程”的觀點是有一定道理的。例如，各種技能的訓練和養成，即如小學生通過背誦“九九表”來培養迅速的（簡單）計算能力等，確實可以被比擬為在頭腦中形成了某種程式，特別是，其中往往還包括了由對於某種程式的自覺執行（有意識的行為）向“自動化”（無意識的行為）的轉變。另外，在筆者看來，以下的歷史事實在一定程度上也可借助所說的觀點到初步的解釋：例如，Euler曾被譽為“分析計算的大師”，因

為，他在冪級數運算和無窮連分式的運用等方面表現出了異常的能力——對此人們先前常常歸因於 Euler 具有非凡的數學直覺能力，但是，這可能是一種更為合理的解釋，即 Euler 事實上正是通過反復的計算實踐而在頭腦中形成了一大套獨有的“程式”。

然而，作為進一步的分析，我們在此又應清楚地看到這樣的事實，即就有關的各個實例而言，所說的“頭腦編程”並非總是一種自覺的“行爲”，特別是，在很多的情況下，即使是當事者本人（更不用說對其他人而言了）常常也不能對相應的思維過程出清楚的說明或解釋，而往往只將此歸結為某種“天賦”或“直覺”。從而，這事實上就很難被看成一種明確的“(思維) 程式”，我們更無法對此作出有效的推廣或普及。

正是從這樣的角度去分析，筆者認為，與“頭腦編程”這一籠統的提法相比，“算法化”的思想就應得到更大的重視，而兩者的區別則主要在於：就相應的思維活動而言，“算法化”是一個精確化、明朗化的過程，從而，對當事者來說，這也就意味著由相應才能的不自覺應用向自覺應用的轉化；另外，更為重要的是，這事實上還可被看成一個“客體化”、“外化”的過程，因為，通過所說的“精確化和明朗化”，相應的“頭腦程式”相對於原來的創造者而言就獲得了一定的獨立性，而且，對於其它人來說，這也就成為可以理解 and 能夠真正學到手的了，特殊地，我們還可以利用計算機代替頭腦去執行所說的程式。

事實上，這也可以被看成計算機技術的迅速發展和廣泛應用在數學教育領域內所產

生的一個重要影響，即“(演) 算法”(algorithm) 的概念現已獲得了普遍的重視。這就正如「計算機和信息科學對數學和數學教育的影響」這一指導性文件中所指出的：“算法就是解某一特定問題或一類問題的過程。算法概念在二千多年前就已出現（求兩整數的最大公因子的 Euclid 算法），近年來，由於計算機的引進，算法又引起了人們的極大興趣。”([2], 第8頁)

例如，即使就初等數學的範圍而言，算法即已顯示出特別的重要性。比如由“四則難題”與代數方法的比較就可清楚地看出這一點。這就正如吳文俊先生所指出：“四則難題製造了許許多多的奇招怪招。但是你跑不遠、走不遠，更不能騰飛... 可是你要一引進代數方法，這些東西都變成了不必要的、平平淡淡的。你就可以做了，而且每個人都可以做，用不著天才人物想出許多招來才能做，而且他可以騰飛，非但可以跑得很遠而且可以騰飛。所以四則難題用代數取而代之，這是完全正確的，對於數學教育這是非常重要的。”([4], 第19-20頁。)

更為一般地說，筆者以為，這事實上更應被看成數學歷史發展的一個重要方面，即一種重要算法的形成往往就標誌著數學的重要進步。例如，十七世紀數學中最為重要的兩個成就，即解析幾何與微積分的建立，顯然都是與某種算法的形成直接相聯繫的。另外，以下就是十九世紀流傳下來一些著名算法：Fourier 級數（以及更一般地，正交函數級數）、Fourier 積分、留數；Gauss-Green-Stokes 積分公式；Heaviside 計算法

和 Laplace 變換等。最後，作為本世紀的實例，我們還可以舉出在拓撲中發明並處於繼續發展之中的同調理論，以及和它密切相關的同態的圖表法，等等。一般地說，這就正如 H. Freudenthal 所指出的：“最引人注目的新事物，也就是引起現代化過程發生的事物都是思辯的產物，... 然而，任何溶岩終將凝固，任何思辯的新生事物都在其自身中包含著算法的萌芽，這是數學的特點。... 算法化意味著鞏固，意味著由一個平台向更高點的跳躍。”([3]，第44頁。)

當然，我們在此還應特別強調算法對於數學未來發展的特殊意義，而又正如前面所已提及的，這主要地就是因為計算機的應用已在這一方向上為我們開拓了新的廣闊前景：大量繁複的事情、也即算法的執行可以留待計算機去做，人腦則將主要地事最富創造性的勞動——從而，“計算機的出現，將使數學現在一張紙一支筆的方法，在歷史的長河中，無異於石器時代的工業方法。”([5]，第44頁。)

值得指出的是，一些學者還從這樣的角度指明了中國古代數學傳統於數學的未來發展有著特別重要的意義。因為，與西方數學以歐幾里得「幾何原本」為代表的所謂公理化演繹體系相對立，我國古代數學的主要特徵之一就是對於算法的突出強調，也即構成了所謂的“問題—算法”體系，從而，隨著計算機的出現，這種以“構建性與機械化為其特色的算法體系... 勢將重新登上歷史舞台。”([6]，第 V 頁。) 特殊地，現今關於“證明機械化”和“機器證明”的研究顯然就可看成這一方向上的重要進步。

綜上可見，作為又一條重要的數學方法論原則，我們就應明確地提出如下的“算法化原則”：

在數學的研究中，我們應當努力創造各種能普遍地適用於解決各類問題的有效算法。

這也就是說，對於算法的追求應當被看成一種十分重要的數學思想。

二. 思維模式的建構：數學教育的基本目標

以上關於“算法化原則”的討論顯然有著重要的教育涵義。例如，正是基於算法的特殊重要性，吳文俊先生提出，“數學教育的現代化就是機械化”。這也就是指，“中小學本來應該是機械化的”，即如“小學（應當）趕快離開四則難題引進代數”，“中學（應當）趕快離開歐幾里德幾何引進解析幾何”，等等。([4]，第25頁。)

以上的提法應當說具有一定的合理性；然而，作為更為深入的分析，筆者以為，我們在此又應明確地強調以下的兩個觀點：

第一，數學教育的目標應是幫助學生學會數學地思維，而就思維的訓練而言，不應簡單地被歸結為算法的學習和應用。

具體地說，就數學的思維活動而言，筆者以為，在此至少可以區分出三個不同的層次：(1) 程式或算法；(2) 解題策略；(3) 高層次數學思維。例如，波利亞所謂的“數學啟發法”就屬於“解題策略”的範圍，而不能被看成一種確定的算法或程式；另外，解題策略的重要性則又顯然在於以下的事實：在真正的數學活

動 (包括數學學習和數學研究) 中, 我們所面臨的往往並非是那種只需應用現成的算法即可求解的“常規性問題”, 從而, 與各種算法的機械記憶和應用相比, 如何靈活地、綜合地去應用已有的知識方法就是更為重要的, 而也正是在這一方面, 解題策略可以給我們一定的幫助。再者, 除去各個具體的思維原則以外 (這就是所謂的“數學研究的精神”, 可參見 [8]), 這裡所說的“高層次數學思維”更直接涉及到了數學思維的品質, 即如思維的靈活性和整合性 (辯證性) 等。例如, 正是在前一種意義上, “調控” (或“元認知”) 也應被看成影響人們解題能力的又一要素 (可參見 [9]); 另外, 所謂的“現實背景與形式模型互相統一的原則”、“解題機巧與程序 (式) 訓練相結合的原則”等 (參見 [10]) 則就顯然體現了對於思維整合性的具體要求, 特別是, 從發明心理學的角度看, 我們在此更應突出地強調“收斂性思維”與“發散性思維”的辯證統一 (參見 [11])。

應當指出的是, 以上關於數學思維不同層次的分析並不能被認為是為算法的研究設定了某種絕對不可逾越的界線, 恰恰相反, 這正是現代人工智能研究 (即如關於“解題機”的研究) 的一個重要方向, 即是要在更高的層次上去模擬人的思維活動 [附錄一]; 然而, 作為問題的另一方面, 我們又應看到, 以上的分析確又清楚地表明算法化原則的局限性。事實上, 這也就是著名的 Gödel 不完備性定理所給予我們的一個重要啓示; 另外, 如果從更為深入的層次去進行分析, 這裡的討論並又直接涉及到了這樣的基本問題: 究

竟什麼是思維的本質? 進而, 計算機究竟能否思維? 或者說, 計算機能否具有真正的智慧 (為與動物的智慧相區別, 可稱之為“有意識智慧”)? (可參見 [12]) 由於這正是對於認知心理學研究基本立場的一個主要批評意見, 即思維並不能唯一地被歸結為“信息的加工” (可參見 [14]), 因此, 在筆者看來, 這也就清楚地表明了我們不應把智力的開發簡單地歸結為算法的學習和應用。

事實上, 正如前面所引用的 H. Freudenthal 的論述所已表明的, 我們在此即應清楚地看到在算法化與創造性勞動之間所存在的相互制約、互相促進的辯證關係: 首先, 各種算法的創立就是創造性勞動的產物, 即是創造思維的一種“凝固”和“外化”; 其次, 除去可以有效地被用於解決一類問題以外, 算法的重要性顯然又在於: 通過把一部分問題的求解歸結為對於現成算法的“機械應用”, 這就為人們積極地去從事新的創造性勞動提供了更大的可能性, 從而算法化也就“意味著由一個平台向更高點的跳躍” (特別是, 又如前面所已提及的, 計算機技術的迅速發展和廣泛應用更在這一方向上為我們開拓了新的前景)。由此, 總的來說, 數學的算法化就不能代替數學中的創造性思維; 恰恰相反, 與算法相比, 創造性活動更應被看成是數學活動的本質。

最後, 以上的論述顯然也就表明算法的學習不應被看成數學教育的主要任務; 與此相反, 筆者以為, 數學教育的基本目標應是幫助學生學會數學地思維 [附錄二]。由於後者作為思維模式的建構過程顯然比算法的學習

包括了更為豐富的內容 (即是同時包括了以上三個層次的意義), 特別是更為突出了創造性能力的培養, 因此, 這事實上也就可以被看成對於片面強調算法這一不正確思想的必要糾正。

第二, 就數學教學的具體方法而言, 也不能被看成對於某種“教學程式”的機械執行。

事實上, 我們在此直接涉及到了學習活動的本質, 即這並非是學生對於教師所授予的知識的被動接受, 而是一個以學習者自身已有的知識和經驗為基礎、並在一定社會環境中進行的主動建構過程。

具體地說, 以上即是關於 (數學) 學習的建構主義觀點 (後者並可被看成從認識論的高度對認知心理學的研究成果進行自覺分析的結果, 對此可參見 [15])。特殊地, 就本文所涉及的論題而言, 筆者以為, 建構主義就為我們正確地去理解算法的學習提供了必要的基礎, 即這不應被看成是對於現成的 (由教師所指明的) 明確程式的機械記憶和應用, 而應是一個以 (學習者自身的) 理解為基礎的主動的建構過程; 另外, 建構主義觀點同時也為我們如何去搞好數學教學指明了切實的努力方向: 教師在“備課”時事實上面臨著一個“三重的”建構任務, 即我們必須按照教學對象、教學內容和教學環境這三者的具體情況去組織教學, 由於後者顯然十分清楚地表明了教學活動的能動性質, 特別是, “教無定法”, 從而, 教學活動也就不能被歸結為對於某種“教學程式”的機械執行。

綜上所述, 我們就是從數學思維的內涵、數學教育目標和教學思想這樣一些方面揭示

了“機械論”觀點的錯誤性。更為一般地說, 筆者以為, 這事實上也就應當被看成計算機時代向人們提出的一個新的挑戰, 即我們應當更為自覺地去抵制和反對各種機械論的觀點。

附錄一:

當然, 我們又應清醒地看到這種工作的困難程度, 而這在相當程度上即是與思維的整合性及動態性質直接相聯系的。例如, 這就正如 P. Churchland 所指出的: “一言以蔽之, 困難之處在於, ... 需要對於一個類似人類所有的世界的整體知識, 而我們還沒有解決一個難題: 如何表徵與貯存這麼巨大的知識庫, 並有可行的抽取與操控的方法。我們甚至還沒法解決如何獲致這麼全面大量知識的問題: 如何生成、修改整個一個概念架構, 如何消除概念架構, 以用新的比較精確的架構來代替; 如何評估這些架構, 以認定其是否顯示真相或是有誤導性, 是正確的還是錯誤的; 所有這些都還是我們完全不了解的。而人工智慧學也幾乎沒有能顧及這些問題。” ([13], 第188-189頁。)

附錄二:

應當指出, 如果從更大的範圍去進行分析, 我們在此還應明確地強調數學教育的文化功能 (可參見 [7]); 但是, 筆者又認為, 數學教育對於人們文化素養的提高並不能建立在空洞的說教之上, 而必須通過具體的數學教學、特別是通過幫助學生學會數學思維才能得以實現。也正因為此, 後者就可被認為是數學教育的基本目標。

參考資料

1. 梁之舜,“頭腦編程”與教學教育, 載「面向21世紀的中國數學教育」, 江蘇教育出版社,1994。
2. ICMI 研究系列叢書之一:「計算機和信息科學對數學教育的影響」, 載「國際展望:九十年代的數學教育」, 上海教育出版社,1990年。
3. 弗賴登塔爾 (荷蘭),「作為教育任務的數學」, 上海教育出版社,1995年。
4. 吳文俊, 數學教育現代化問題, 載「21世紀中國數學教育展望」, 北京師範大學出版社,1993年。
5. 吳文俊, 數學的機械化,「百科知識」,1980年,第三期。
6. 吳文俊,“九章算術”及其劉徽注研究序言, 載「“九章算術”及其劉徽注研究」, 陝西人民教育出版社,1990年。
7. 徐利治、鄭毓信, 現代數學教育工作者值得重視的幾個概念,「數學通報」,1995年,第九期。
8. 鄭毓信, 數學思想、數學思想方法與數學方法論,「科學、技術與辯證法」, 1993年,第五期。
9. 鄭毓信,「問題解決與數學教育」, 江蘇教育出版社,1994年。
10. 張奠宙等,「數學教育學」, 江西教育出版社, 1991年。
11. 徐利治、王前,「數學與思維」, 湖南教育出版社, 1990年。
12. 彭羅期,「皇帝新腦」, 湖南科學技術出版社, 1994年。
13. Churchland, P.,「物質與意識」, 遠流出版公司 (台灣), 1994年。
14. 樂國安, 對現代認識心理學理論問題的爭論,「自然辯證法通訊」, 1995年,第四期。
15. 鄭毓信,「數學教育哲學」, 四川教育出版社, 1995年。

—本文作者分別任教於大連理工大學數學系與南京大學哲學系—