

# 從醉月湖的面積談起：向量微積分簡介

蔡聰明

## 1. 一個求面積的問題

面積是一個很古老的幾何概念，它起源於人類要丈量土地的大小。Geometry 這個字的根源是 geometrein, geo 是土地, metrein 是測量，故幾何學的原意是測量土地、求面積。自古以來，由於所給的條件有各式各樣，於是對應有各式各樣的面積公式。經過兩千多年的發展，終於創立微積分，透過微分法一舉解決了一切求積問題。

問題 1: 在平面上，一條封閉曲線所圍成的領域，例如台大的醉月湖，如何求它的面積呢？

按思考的常理，我們先退到比較簡單的特例，譬如說透過離散化或有窮化，退到多邊形，再退到四邊形乃至三角形。

對於三角形的情形，如果所給的數據是三個邊之長，那麼其面積就有 Heron 公式可循，參見 [1]。推廣到四邊形的情形，如果所給的數據是四個邊之長加上兩對角線或兩個對角，那麼其面積又有 Brahmagupta 公式與 Bretschneider 公式可算，參見 [2]。四邊

形的面積公式已經有點煩瑣，如果要再推廣到五邊以上的多邊形，其困難是可以想像得到的，甚至根本行不通。一個求面積公式，若只能對付三角形或四邊形，那麼也太局限了，不合數學追尋普遍的“萬人敵”之道。

換個追尋的方向，改變所給的數據是個好辦法：

(i) 假設多邊形的頂點皆為平面上的格子點，那麼其面積就有 Pick 公式

$$A = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (1)$$

其中  $b$  與  $i$  分別表示在邊界上及內部的格子點之個數，參見 [4]。讓格子的間隔越來越小，原則上利用 (1) 式可以求出一般平面領域的面積。

(ii) 已知多邊形的頂點坐標，因為頂點唯一決定多邊形（邊則不然），所以多邊形的面積理應可以利用頂點的坐標來表達。

實際測量一塊多邊形的土地，我們得到邊長  $r_1, r_2, \dots$  以及邊相對於水平線之旋轉角  $\theta_1, \theta_2, \dots$ ，參見圖 1。由這些數據可以得到多邊形的頂點坐標。設第一點的坐標為

$A = (x_1, y_1)$  (由取平面坐標系而決定下來);  
然後就可求出  $B = (x_2, y_2)$  如下:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + r_1 \cos \theta_1 \\ y_2 = y_1 + r_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

接著求出  $C = (x_3, y_3)$  為

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + r_2 \cos \theta_2 \\ y_3 = y_2 + r_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

... 等等, 參見圖 2。

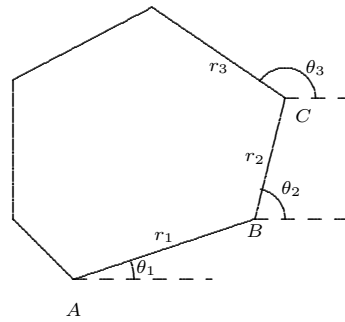


圖 1

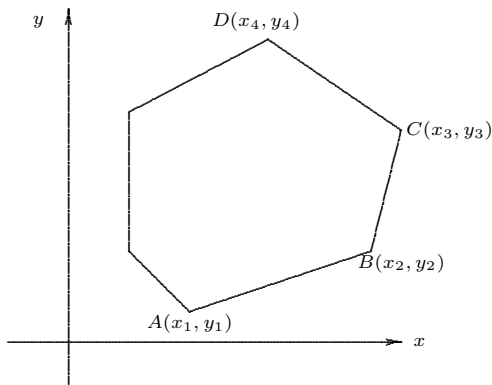


圖 2

問題 2: 已知多邊形的頂點坐標為  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 如何求其面積?

本文的主題是: 先追尋多邊形的面積公式; 接著連續化得到平面上一般領域 (包括醉月湖) 的面積公式; 再作推廣, 得到平面上的 Green 定理; 最後推廣到三維空間, 得到 Gauss 的散度定理與 Stokes 的旋度定理。這些深深觸及向量微積分的核心, 是一條值得探尋的路徑。

## 2. 多邊形的面積公式

多邊形仍然太複雜, 我們再退到三角形的特例, 探尋完成後, 再進到多邊形。這種處理問題時退、進之道很值得留意。

問題 3: 已知三角形三個頂點的坐標為  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ , 如何求其面積?

我們進一步退到三個頂點為  $O = (0, 0), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$  之更特殊三角形。令  $OB, OC$  與  $x$  軸的夾角分別為  $\theta_1$  與  $\theta_2$ , 且  $OB = \rho_1, OC = \rho_2$ , 則

$$x_2 = \rho_1 \cos \theta_1, \quad y_2 = \rho_1 \sin \theta_1$$

$$x_3 = \rho_2 \cos \theta_2, \quad y_3 = \rho_2 \sin \theta_2$$

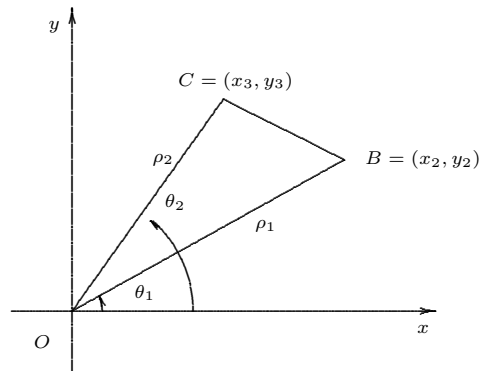


圖 3

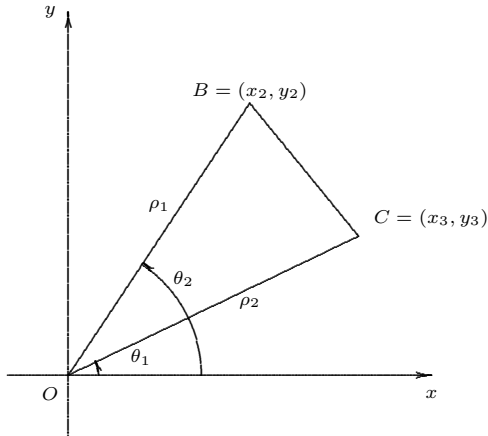


圖4

如上圖所示，我們分成兩種情形來討論：

(i) 當  $O, B, C$  成爲逆時針 (或右手系) 定向時，如圖3，則  $\triangle OBC$  的面積爲

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\
 &= \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1) \\
 &= \frac{1}{2} (x_2 y_3 - y_2 x_3) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

(ii) 當  $O, B, C$  成爲順時針 (或左手系) 定向時，如圖4，則  $\triangle OBC$  的面積爲

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
 &= \frac{1}{2} (x_3 y_2 - x_2 y_3) \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

因此行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

代表由  $OB$  與  $OC$  所生成的平行四邊形的有號面積，當  $O, B, C$  逆時針定向時爲正，順時針定向時爲負。利用向量外積也可以推導出這個結果。

回到問題3，不妨假設  $\triangle ABC$  爲逆時針走向，見圖5，則  $\triangle ABC$  的面積爲

$$\begin{aligned}
 S &= \triangle OAB + \triangle OBC - \triangle OAC \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中規定  $x_4 = x_1$  且  $y_4 = y_1$

註：通常教科書將 (3) 式寫成

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

不過，(3) 式適於推廣到任何多邊形，而 (4) 式則不然。換言之，(4) 式是死的，(3) 式才是活的有源之泉。

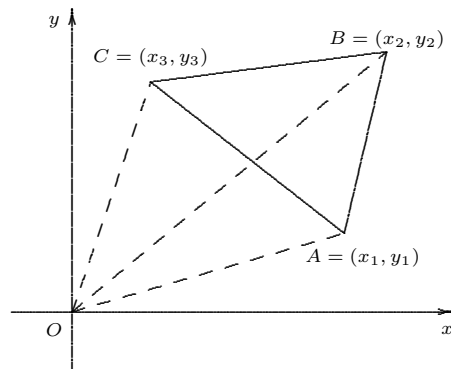


圖5

仿上述之論證可得

定理 1: 設  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$  為  $n$  邊形之頂點坐標且為逆時針定向, 則此  $n$  邊形的面積為

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \quad (5)$$

其中規定  $x_{n+1} = x_1$  且  $y_{n+1} = y_1$

註: (5) 式又叫做測量師的公式。

### 3. 醉月湖的面積公式

公式 (5) 更是活生生的, 它還可以再推廣, 無窮化與連續化成平面上封閉曲線所圍成的領域 (如醉月湖) 之面積公式。為此, 我們根據行列式的性質將 (5) 式稍作變形

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} - x_k \\ y_k & y_{k+1} - y_k \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & \Delta x_k \\ y_k & \Delta y_k \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

如何連續化呢? 由微積分我們知道, 圓內接正  $n$  邊形的連續化 (即  $n \rightarrow \infty$ ) 就得到圓, 差和分的連續化就是微積分, 參見 [3]。按此理, 平面上封閉曲線  $\Gamma$  所圍成的領域, 可以看作是邊長為無窮小 (infinitesimal) 的無窮多邊之多邊形 (我們採無窮小論證之觀點)。所謂“連續化”在作法上就是將

和分  $\Sigma$  改為積分  $\int$

差分  $\Delta$  改為微分  $d$

因此, (5) 式的連續化就變成

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx \quad (7)$$

此地積分記號  $\oint_{\Gamma}$  意指沿  $\Gamma$  以逆時針方向作曲線積分 (line integral)。我們可以這樣來理解 (6) 式: 想像封閉曲線  $\Gamma$  上無窮地接近的兩點  $(x, y), (x + dx, y + dy)$  與原點  $(0, 0)$  所圍成無窮小的三角形面積為

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & x + dx \\ y & y + dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix}$$

再讓  $(x, y)$  沿曲線  $\Gamma$  的逆時針方向變動, 連續地求和 (即積分), 就得到 (7) 式, 參見圖 6。

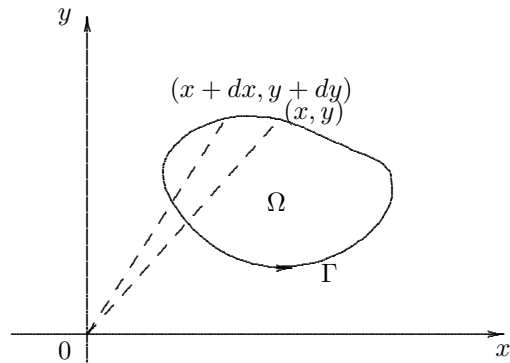


圖 6

例 1: 橢圓  $\Gamma$  的參數方程式為

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

由 (7) 式算得

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t \\ &\quad - b \sin t (-a \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

這恰是通常熟悉的橢圓面積公式。

因此我們很有理由相信公式 (7) 是對的。事實上，我們可以採用一般微積分教科書上的極限論證法給予證明。不過，我們要指明：從 Leibniz 或非標準分析 (non-standard analysis) 的眼光來看，無窮小論證法是合法的（歷史上曾被宣佈為“非法的”），更漂亮而具有發現的潛力，並且足以保證 (7) 式是成立的。

定理 2: 設  $\Gamma : t \in [a, b] \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$  為一條單純的 (即沒有打結)、封閉的可微分曲線，並且是逆時針定向，則  $\Gamma$  所圍成的領域之面積為

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \quad (8) \end{aligned}$$

註: (8) 式表示，沿著曲線  $\Gamma$  繞一圈，作某種功 (或度量)，就知道曲線所圍的面積，這真奇妙。一位農夫沿著農地走一圈就知道面積!

對於極坐標描述的封閉曲線

$$\Gamma : r = f(\theta), a \leq \theta \leq b$$

可改為參數方程式

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad a \leq \theta \leq b$$

計算

$$x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) = (f(\theta))^2$$

於是得到:

推論: 設  $\Gamma : r = f(\theta), a \leq \theta \leq b$ , 為一條單純的、封閉的可微分極坐標曲線，則  $\Gamma$  所圍成領域之面積為

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\theta))^2 d\theta \quad (9)$$

註: 事實上，不必限於封閉的極坐標曲線，(9) 式亦成立。這是在微積分中我們熟悉的一個公式。

例 2: 設  $a > 0$ , 考慮半徑為  $a$  的圓在半徑為  $3a$  的圓內部沿著圓周滾動，試求滾動圓上一點  $P$  的軌跡所圍成領域之面積。

解: 如圖 7 所示，取圓心為原點，並且小圓上的  $P$  點起先跟  $(3a, 0)$  點重合，然後開始滾動，再取圓心角  $\theta$  當參數，容易算出  $P$  點的坐標  $(x, y)$  滿足

$$\begin{cases} x = 2a \cos \theta + a \cos 2\theta \\ y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

我們稱  $P$  點的軌跡為圓內三尖輪迴線 (Deltoid)。由公式 (8) 知，它所圍成領域之面積為

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} [(2 \cos \theta + \cos 2\theta) \cdot (2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) \\ &\quad - (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \cdot (-2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos 3\theta) d\theta \\ &= 2\pi a^2 \end{aligned}$$

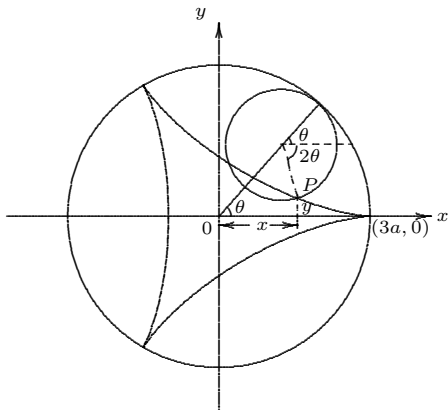


圖 7

習題：求星形線  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$ , 所圍的面積。

#### 4. 推廣成 Green 定理

公式 (8) 是露出海面上的冰山之一角，底下還有更廣大的整座冰山。為了發現這座冰山，我們將 (8) 式重新整理成：

$$\iint_{\Omega} 2dxdy = 2S = \oint_{\Gamma} xdy - ydx \quad (10)$$

其中  $\Omega$  表示  $\Gamma$  所圍成的領域，通常也記  $\Gamma = \partial\Omega$ ，表示  $\Omega$  的邊界。

(10) 式顯示兩重積分與線積分具有密切關係。常函數  $\varphi(x, y) = 2$  在  $\Omega$  的內部作兩重積分就等於向量場  $\vec{V}(x, y) = x\vec{i} - y\vec{j}$  沿  $\Omega$  的邊界  $\partial\Omega$  作線積分。這條線索類似於微積分根本定理

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f'(x)dx &= \int_{\partial[a,b]} f(x)dx \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

亦即  $f$  在邊界  $\partial[a, b]$  上作積分 (得  $f(b) - f(a)$ ) 等於  $f$  的變化率  $f'$  在  $[a, b]$  上作積分。因此，常函數  $\varphi(x, y) = 2$  似乎應該就是

向量場  $\vec{V}(x, y) = x\vec{i} - y\vec{j}$  的某種“變化率” (或“微分”)。

為了尋找兩重積分與線積分的一般關係式，我們考慮平面上的向量場

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

沿著一條封閉曲線  $\Gamma$  作線積分

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

問題4: 線積分  $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy$  可化成  $\Omega$  上什麼形式之兩重積分，包括 (10) 式為特例？

我們仔細觀察 (10) 式。欲  $\oint_{\Gamma} xdy - ydx$  改寫成  $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy$  之形，只需取  $P(x, y) = -y$  且  $Q(x, y) = x$  就好了。但是  $\iint_{\Omega} 2dxdy$  這一項怎麼來的呢？容易看出

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

因此  $\iint_{\Omega} 2dxdy$  就是由  $\iint_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$  得來的。

到此為止，我們已經可以提出猜測 (Conjecture):

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \quad (11)$$

我們先用一個例子來檢驗 (11) 式。

例3: 設  $\vec{F}(x, y) = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}$ , 即  $P(x, y) = 2y, Q(x, y) = 3x, \Gamma: x^2 + y^2 = 1$  為單位圓，取參數方程式

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

則

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy &= \oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy \\ &= \int_0^{2\pi} [2 \sin t(-\sin t) + 3 \cos t \cdot \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos 2t\right) dt \\ &= \pi \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3-2) dx dy = \pi \end{aligned}$$

因此，上述猜測對於本例成立。

我們已有相當理由支持 (11) 式之猜測，那麼我們就試證看看吧。仍然從最簡單的情形著手：

(i) 當  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  為矩形領域時，參見圖 8。

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \\ &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy \\ &\quad + \int_b^a P(x, d) dx + \int_d^c Q(a, y) dy \\ &= \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy \\ &\quad - \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx \end{aligned}$$

由 Newton-Leibniz 公式 (簡稱  $N-L$  公式) 知

$$\begin{aligned} Q(b, y) - Q(a, y) &= \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ P(x, d) - P(x, c) &= \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \\ &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \end{aligned}$$

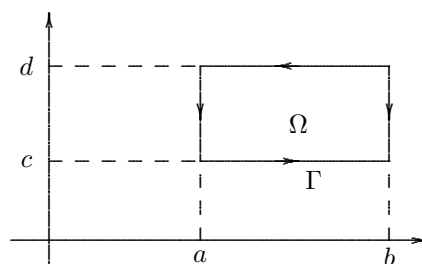


圖 8

(ii) 其次考慮平面領域  $\Omega$ ，滿足：邊界  $\Gamma = \partial\Omega$  跟平行於  $x$  軸與  $y$  軸的直線至多只交於兩點，參見圖 9。

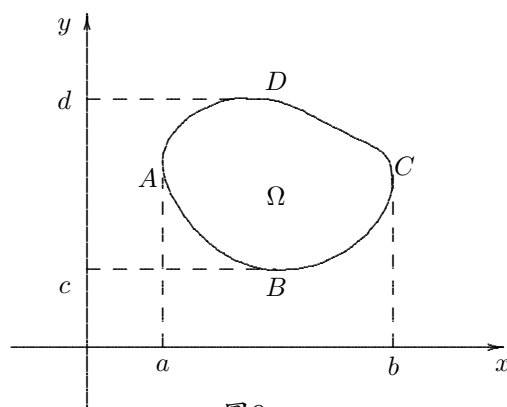


圖 9

我們只需要證明

$$\oint_{\Gamma} Pdx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (12)$$

與

$$\oint_{\Gamma} Qdy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (13)$$

再相加起來就好了。今證 (12) 式: 邊界  $\Gamma$  可以分成兩部分

$$\Gamma_1 : CDA \text{ 與 } \Gamma_2 : ABC$$

分別由函數  $y = f_1(x)$  與  $y = f_2(x)$ ,

$x \in [a, b]$  所定義, 於是

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} Pdx \\ &= \int_{\Gamma_1} Pdx + \int_{\Gamma_2} Pdx \\ &= \int_a^b P(x, f_2(x))dx + \int_b^a P(x, f_1(x))dx \\ &= - \int_a^b [P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))]dx \\ &= - \int_a^b \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \quad (\text{由N-L公式}) \\ &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

同理可證明 (13) 式。

(iii) 當  $\Omega$  為單純連通領域 (simply connected region) 時, 可以分割成幾個 (ii) 的領域之聯集, 這種情形上述的猜測也成立。參見圖 10。

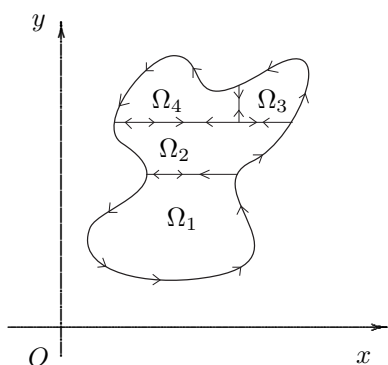


圖 10

定理 3: (Green 定理, 1828 年) 設  $\Omega$  為由封閉曲線  $\Gamma$  所圍成的單純連通領域, 並且

$P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  在  $\Omega$  上皆為連續函數, 則

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (14)$$

註: 我們不去追求最廣泛的 Green 定理。一般微積分教科書都將 (10) 式貶為是 (14) 式的特例或腳註。我們反其道而行, 將 (10) 式視為是生出 (14) 式的胚芽 (germ) 或線索 (clue)。

### 5. 整裝待發

如何將 Green 定理推廣到三維空間? 為此, 我們要對於 Green 定理的形式與內涵兩方面作更詳細的考察。

#### 甲. 形式上的觀察

Green 定理可以寫成兩個等價的形式:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (15)$$

$$\oint_{\Gamma} Pdy - Qdx = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \quad (16)$$

事實上, 在 (15) 式中, 將  $P$  改為  $-Q$ ,  $Q$  改為  $P$ , 就得到 (16) 式; 反過來, 在 (16) 式中, 將  $P$  改為  $Q$ ,  $Q$  改為  $-P$ , 就得到 (15) 式。

進一步, 採用向量記號將 (15) 與 (16) 改寫:

令向量場  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , 及微分算子  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$ 。模仿向量的內積與外積運算, 我們定義:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j})$$



$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (18)$$

再令  $s$  表示曲線  $\Gamma$  之弧長參數,  $ds$  表示無窮小線元, 於是單位切向量為

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j}$$

向外單位法向量為

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds} \vec{i} - \frac{dx}{ds} \vec{j}$$

參看圖 11。於是

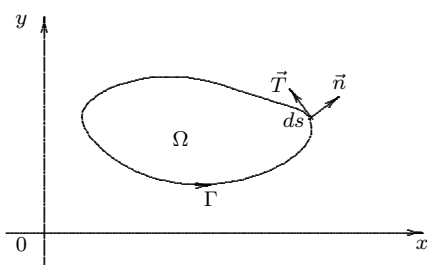


圖 11

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds \\ &= \oint_{\Gamma} (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \left( \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy \end{aligned}$$

以及

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

$$\begin{aligned} &= \oint_{\Gamma} (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \left( \frac{dy}{ds} \vec{i} - \frac{dx}{ds} \vec{j} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} P dy - Q dx \end{aligned}$$

從而 (15), (16) 兩式可分別改寫成:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA \quad (19)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) dA \quad (20)$$

其中  $dA$  表示無窮小的面積元。(19) 式叫做切向式 (tangential form), (20) 式叫做法向式 (normal form)。換言之, Green 定理有 (15)、(16)、(19) 與 (20) 四種化身。這四個式子都叫做 Green 公式。

### 乙. 內涵的掌握

$\nabla \cdot \vec{F}$  與  $\nabla \times \vec{F}$  (即 (17) 與 (18) 兩式) 代表什麼物理意義呢?

由於 Green 公式與  $N-L$  公式在形式與內涵上都具有相同的本質, 所以  $\nabla \cdot \vec{F}$ 、 $\nabla \times \vec{F}$  與函數  $f'$  應該具有密切關連。

問題 5: 如何解釋  $N-L$  公式

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx \quad ?$$

我們採用流體流動的觀點來解釋。考慮一根直線管子, 參見圖 12, 假設橫截面具有單位面積。

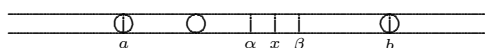


圖 12

今想像有流體在管子中流動，其速度場為  $\vec{v}(x) = v(x)\vec{i}$ ，密度為  $\rho(x)$ 。令向量場

$$\vec{F}(x) = \rho(x)v(x)\vec{i} = f(x)\vec{i}$$

這叫做流體的通量向量場 (the flux vector field of the flow)。因此， $f(x)$  表示單位時間流體通過  $x$  點處橫截面之通量 (flux)。由於  $\vec{i}$  是向右之單位向量，故當  $f(x) > 0$  時，表示流體向右流過  $x$  點處的截面；當  $f(x) < 0$  時，表示流體向左流過  $x$  點處的截面。於是從大域的 (global) 眼光來看， $f(b) - f(a)$  表示在管段  $[a, b]$  中，單位時間流體的減少量，即單位時間流體流出  $[a, b]$  的通量。

另一方面，從局部的 (local) 眼光來看流速場的變化。考慮區間  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  且  $x \in (\alpha, \beta)$ ，那麼  $f(\beta) - f(\alpha)$  表示在管段  $[\alpha, \beta]$  中單位時間流體的減少量，從而，牛頓商  $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$  表示單位時間單位長度管段  $[\alpha, \beta]$  中流體的平均減少量。因此微分

$$f'(x) = \lim_{\beta \downarrow x, \alpha \uparrow x} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (21)$$

表示單位時間單位長度流體在  $x$  點處的減少量，亦即在  $x$  點單位時間單位長度流散出的量，因此叫做散度 (divergence)。按積分的定義可知， $\int_a^b f'(x)dx$  表示單位時間流體在  $[a, b]$  中的減少量。今因流體不會無中生有，也不會無故消失，所以  $N - L$  公式

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

顯然成立。這是一種散度定理。

上述流體的觀點，推廣到兩維平面恰好也就是 Green 定理 (20) 式的解釋。為了說明這件事，我們必須推廣 (21) 式。

在 (21) 式中，分母可改為矩形的面積，但是分子較難推廣，不過並不絕望。我們重新整頓一下  $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ：分母是區間  $I = [\alpha, \beta]$  的長度，記為  $|I|$ ，而分子  $f(\beta) - f(\alpha)$  改為

$$f(\beta) - f(\alpha) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i f(r_i)$$

其中  $r_1 = \alpha, r_2 = \beta$  是  $I$  的邊界點，符號  $(-1)^i$  表示在左端點取負號，右端點取正號，這樣才符合流體流出  $I = [\alpha, \beta]$  的意思，即在  $I$  的端點流體是向外流出的。換言之，在邊界點都賦予向外法向之概念，即

$$f'(x) = \lim_{I \downarrow \{x\}} \frac{\sum f(r_i) \cdot (\text{在點 } r_i \text{ 之向外法向})}{|I|} \quad (22)$$

其中  $\sum$  是對  $I$  的邊界點來求和的。經過這樣的修飾，(22) 式才適合推廣到高維空間。

設  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  為兩維平面上的一個向量場，想像成流體的通量向量場。令  $S \subset \mathbf{R}^2$  為平面上一塊領域， $(x, y) \in S$ ，將 (22) 式中的求和  $\sum$  改為沿邊界  $\partial S$  作積分，即定義：

$$\lim_{S \downarrow \{(x,y)\}} \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{|S|} = (\text{div} \vec{F})(x, y) \quad (23)$$

叫做向量場  $\vec{F}$  在  $(x, y)$  點的散度 (divergence)，其中  $|S|$  表示  $S$  的面積， $\vec{n}$  表示沿邊界的  $\partial S$  的向外單位向量。這是一維導數 (22) 式的類推與推廣。

根據定義， $(\text{div} \vec{F})(x, y)$  代表在  $(x, y)$  點處單位時間單位面積流體向外流出的通量。這是局部變化率，是向量場  $\vec{F}$  的一種“微分”概念。

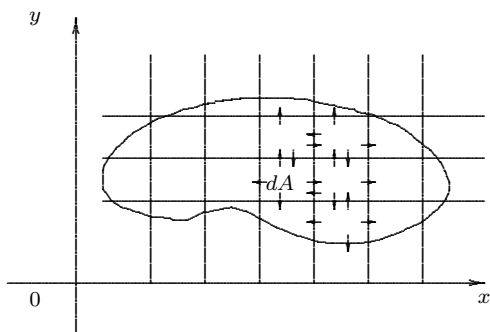


圖13

按兩重積分的定義， $\iint_{\Omega}(\operatorname{div} \vec{F})dA$  的意義是：將  $\Omega$  分割成無窮多塊的無窮小塊，參見圖 13。於是  $(\operatorname{div} \vec{F})dA$  表示單位時間流體流出  $dA$  的通量，然後對整個  $\Omega$  連續求和，即作積分，就得到  $\iint_{\Omega}(\operatorname{div} \vec{F})dA$ 。由於在內部的邊界，流體的進出恰好抵消，整個合起來只剩下流出邊界  $\partial\Omega$  的通量。因此， $\iint_{\Omega}(\operatorname{div} \vec{F})dA$  代表單位時間流體流出  $\partial\Omega$  的通量。另一方面，這個流出通量按定義就是線積分  $\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}ds$ ，所以下式顯然成立：

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}ds = \iint_{\Omega}(\operatorname{div} \vec{F})dA \quad (24)$$

此式跟 (20) 式還有一段距離，不過我們可以證明

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (25)$$

代入 (24) 式就得到法向式的 Green 公式了。

另一方面，在上述 (23) 式的定義中，其分子是沿邊界  $\partial S$  的向外單位法向作積分，現在如果改為沿邊界的切向  $\vec{T}$  作積分，用循環量 (Circulation) 代替通量 (flux)，就得到旋度 (Curl 或 rotation) 的定義：

$$\lim_{S \downarrow \{(x,y)\}} \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T}ds}{|S|} = (\operatorname{rot} \vec{F})(x,y) \cdot \vec{k} \quad (26)$$

換言之， $\operatorname{rot} \vec{F}$  (有時也記為  $\operatorname{Curl} \vec{F}$ ) 為一個向量場，它在  $z$  軸的投影恰好就是流體在  $(x,y)$  點處單位時間單位面積的循環量。這也是局部變化率，是向量場  $\vec{F}$  的另一種“微積分”概念。

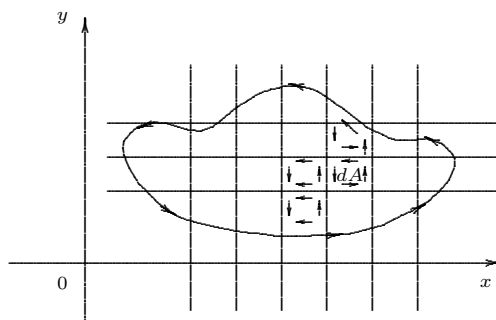


圖14

按重積分的定義， $\iint_{\Omega}(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k}dA$  的意義是：將  $\Omega$  分割成無窮多塊的無窮小塊，參見圖 14。於是  $(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k}dA$  表示單位時間流體繞  $dA$  的循環量，然後對整個  $\Omega$  作積分得到  $\iint_{\Omega}(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k}dA$ 。由於沿內部的邊界之循環量恰好來回抵消，整個合起來只剩下沿邊界  $\partial\Omega$  的循環量。另一方面，這個總循環量按定義就是線積分  $\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{T}ds$ ，所以下式顯然成立：

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{T}ds = \iint_{\Omega}(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k}dA \quad (27)$$

我們也可以證明

$$(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{k} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (28)$$

代入 (27) 式就得到切向式的 Green 公式了。

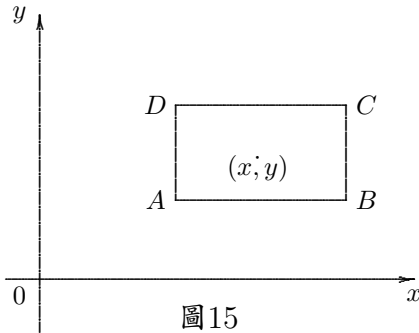


圖15

下面我們就來證明 (25) 與 (28) 兩式。

爲了計算方便起見，我們作一矩形，以  $(x, y)$  點爲中心，圍成領域  $S$ ，並且四邊跟  $x$  軸或  $y$  軸平行，參見圖 15。設  $AB = \Delta x, BC = \Delta y$ ，於是四個頂點的坐標爲

$$A = (x - \frac{1}{2}\Delta x, y - \frac{1}{2}\Delta y),$$

$$B = (x + \frac{1}{2}\Delta x, y - \frac{1}{2}\Delta y),$$

$$C = (x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}\Delta y),$$

$$D = (x - \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}\Delta y),$$

我們先證明 (25) 式。爲此，必須估算流體流出  $S$  之通量。流體流出邊界  $AB, CD, AD$  與  $BC$  的通量分別約爲

$$-Q(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta x,$$

$$Q(x, y + \frac{1}{2}\Delta y) \cdot \Delta x,$$

$$-P(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \cdot \Delta y,$$

$$P(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) \cdot \Delta y,$$

其中我們取四邊的中點當估值的代表點。因此，流出  $S$  的通量約爲

$$[P(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) - P(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)]\Delta y$$

$$+[Q(x, y + \frac{1}{2}\Delta y) - Q(x, y - \frac{1}{2}\Delta y)]\Delta x$$

由平均變率定理 (Mean value theorem)，這個通量爲

$$[\frac{\partial P}{\partial x}(x + \xi\Delta x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y + \eta\Delta y)]\Delta x\Delta y \tag{29}$$

其中  $0 < \xi, \eta < 1$ 。顯然，當  $\Delta x$  與  $\Delta y$  越來越小時，近似估計就越來越精確。

今將 (29) 式除以  $|S| = \Delta x\Delta y$ ，再讓  $\Delta x$  與  $\Delta y$  趨近於 0，則得

$$\lim_{S \downarrow \{(x,y)\}} \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{|S|} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

亦即

$$(\text{div } \vec{F})(x, y) = (\nabla \cdot \vec{F})(x, y)$$

於是 (25) 式得證。

其次證明 (28) 式，仍然參見圖 15。我們要估算流體沿邊界  $\partial S$  的循環量，即  $\vec{F}$  沿  $AB, BC, CD, DA$  的線積分，其總和約爲

$$\begin{aligned} & [P(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) - P(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)]\Delta x \\ & + [Q(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) - Q(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)]\Delta y \\ & = [\frac{\partial Q}{\partial x}(x + \xi\Delta x, y) \\ & - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y + \eta\Delta y)]\Delta x\Delta y \end{aligned} \tag{30}$$

其中  $0 < \xi, \eta < 1$ 。

將 (29) 式除以  $|S| = \Delta x\Delta y$ ，再讓  $\Delta x$  與  $\Delta y$  趨近於 0，得到

$$\lim_{S \downarrow \{(x,y)\}} \frac{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds}{|S|} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

亦即

$$(\text{rot } \vec{F})(x, y) = (\nabla \times \vec{F})(x, y)$$

從而 (28) 式得證。

### 6. 推廣到三維空間: Gauss 定理與 Stokes 定理

抓住了 Green 公式的形式與內涵, 要推廣到三維空間就不難了。首先令

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

表示空間中的一個向量場 (Vector field), 即定義在空間中某領域的一個向量值函數。定義:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

分別叫做向量場  $\vec{F}$  的散度與旋度。

其次我們注意到, 平面領域  $\Omega$  可以有兩個方向的推廣: 一個是空間中的可定向 (Orientable) 曲面  $S$  (Möbius 帶子就不是可定向曲面), 參見圖 16; 另一個是空間中的一塊立體領域  $V$ , 參見圖 17。

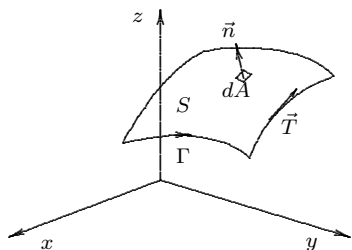


圖 16

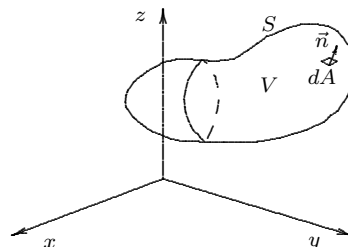


圖 17

在 (19) 式中,  $\vec{k}$  是  $\Omega$  的向外單位法向量; 當  $\Omega$  改為空間曲面  $S$  時,  $\vec{k}$  就應該改為  $S$  的向外單位向量  $\vec{n}$ 。

我們可以證明  $\nabla \cdot \vec{F}$  與  $\nabla \times \vec{F}$  跟二維的情形有類似的解釋。 $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z)$  表示單位時間單位體積流體在點  $(x, y, z) \in V$  的流出通量,  $(\nabla \times \vec{F})(x, y, z) \cdot \vec{n}$  表示單位時間單位體積流體在點  $(x, y, z) \in S$  的循環量。從而 (19) 與 (20) 兩式就推廣為:

定理 4: (Gauss 定理, 又叫做散度定理, 1839 年) 設向量場  $\vec{F}$  的分量  $P, Q, R$  及其一階偏導函數皆為連續函數, 則

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv \quad (31)$$

其中  $\partial V$  為圍成  $V$  之封閉曲面,  $dV$  表示無窮小的體積元。

定理 5: (Stokes 定理, 又叫做旋度定理, 1854 年) 在與定理 4 相同的假設下, 我們有

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA \quad (32)$$

參見圖 16。

在上述中, (31) 式與 (32) 式分別將曲面積分與三重積分, 線積分與曲面積分連結

起來。若採用直角坐標系來表達,它們分別就是

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial V} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \\ & \quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (33)$$

這一切可以再推廣到  $\mathbf{R}^n$  的可定向  $k$  維可微分子流形  $M \subset \mathbf{R}^n$ , 用微分式的積分與外微分理論, 統合成為廣義的 Stokes 定理:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (34)$$

其中  $\omega$  為  $k-1$  型微分式。這是微積分學根本定理最本質的形式。

## 7. 特殊與普遍的互相含納

我們從醉月湖的求面積問題出發, 先退到多邊形, 再退到三角形, 最後更退到一頂點是原點之特殊三角形。此時問題變得很簡單, 一下子就解決了。然後開始前進, 先是一般三角形, 再來是多邊形, 緊抓住公式的正確形式, 連續化就解決了求醉月湖的面問題。接著順勢推舟, 飛躍出 Green 定理, 整理成法向式與切向式, 再類推、推廣成三維空間的

Gauss 定理與 Stokes 定理, 最後統合於廣義的 Stokes 定理。

這種解決問題的「退進之道」, 在數學中隨處可見。偉大數學家 Hilbert 說得淋漓盡致:「做數學的要訣 (或藝術) 在於找到含有普遍性的所有胚芽那個特例。」(The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.) 三角形的面積公式就是符合 Hilbert 所說的「那個特例」。本文正好可作為 Hilbert 這句名言之腳註。

特殊孕育出普遍, 充實普遍; 普遍又回過頭來照顧特殊, 含納特殊。這種特殊到普遍之拾級而上, 有機連結, 互相啓發與觀照, 發人深省。

## 參考文獻

1. 蔡聰明: 談 Heron 公式—記一段教學經驗, 數學傳播, 第十七卷第一期, 1993。
2. 蔡聰明: 四邊形的面積, 數學傳播, 第十七卷第三期, 1993。
3. 蔡聰明: Leibniz 如何想出微積分? 數學傳播, 第十八卷第三期, 1994。
4. B. Grünbaum and G. C. Shephard, Pick's Theorem, Amer. Math. Monthly, 150-161, 1993.
5. M. J. Crowe, A History of Vector Analysis, Univ. of Notre Dame Press, 1967.
6. M. Kline, Mathematical thought from Ancient to modern time, Oxford Univ. Press, 1972.
7. D. M. Bressoud, Second year calculus, Springer-Verlag, 1991.

—本文作者任教於台灣大學數學系—