關於一大類極限問題的系統化及其註記

姚雲飛　朱茱

摘要

本文以函數形式的 Stolz 定理爲工具, 將一大類極限問題系統化, 給出了一些文獻中常見命題新的解法與擴充, 得到了某些新的命題, 把著名的 L'Hospital 法則納入了 Stolz 定理推論之中, 減弱了 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L'Hospital 法則某個條件。

關鍵詞: Stolz定理、Darboux 定理、推廣、系統。

文 [1] 中介紹了這樣一個極限命題:

設 T 爲正常數, 若函數 $f(x), g(x)$ $x \in (a,+\infty)$ 滿足:

(1) $g(x+T) > g(x), x \in (a,+\infty)$;

(2) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的任意子區間上有界 (此處 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的任意子區間上有界是指 $\forall[\alpha,\beta] \subset (a,+\infty), f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界, 以下均同);

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = l$ (l 爲有限數或 $+\infty$ 或 $-\infty$) 則 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

這個命題 [1] 中已給出了一個漂亮的證明, 爲了行文方便, 給上述命題取名“定理1”。[1] 中稱定理1爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 推廣定理, 並給出了一些應用。顯示出這個定理1的應用前景是美好的。爲了使這個定理1應用範圍更廣, 本文將適當變換定理1的條件, 將其加以對應式的拓廣與擴充, 從而得到了某些新的命題。同時給出了一些文獻常見的命題新的擴充。

事實上, 根據定理1, 我們可得到下列三個定理:

定理2: *設 T 爲正常數, 若函數 $f(x)$, $g(x)$, $x \in (a,+\infty)$ 滿足:*

(1) $g(x+T) < g(x), \quad x \in (a,+\infty)$

(2) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, \quad f(x), g(x)$ *在 $(a,+\infty)$ 的任意子區間上有界;*

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = l$ (l *同定理*1) *則* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

證: 設 $G(x) = -g(x)$ 由已知條件與定理1知其成立。

定理3: 設 T 爲正常數, 若函數 $f(x)$, $g(x)$, $x\in(-\infty,a)$ 滿足:

(1) $g(x+T)<g(x), x\in(-\infty,a)$;
(2) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $f(x)$、$g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 的任意子區間上有界;
(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l 同定理1) 則 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

證: 作替換 $x=-t$, 則 $x=a$ 對應 $t=-a$, $x=-\infty$ 對應 $t=+\infty$, 令 $F(t)=f(-t)=f(x)$, $G(t)=g(-t)=g(x)$, 於是知 $F(t)$、$G(t)$ 在 $(-a,\infty)$ 上有定義, 在 $(-a,+\infty)$ 內的任意子區間上均有界, $\forall t\in(-a,+\infty)$ 有 $G(t)>G(t-T)$, 且 $\lim_{t\to+\infty}G(t)=\lim_{t\to+\infty}g(-t)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$, 又因爲

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(-t+T)-f(x)}{g(-t+T)-g(x)}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{f[-(t-T)]-f(-t)}{g[-(t-T)]-g(-t)}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t-T)-F(t)}{G(t-T)-G(t)}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)-F(t-T)}{G(t)-G(t-T)}。\end{aligned}$$

依定理條件知上式極限存在 (有限或 $+\infty$ 或 $-\infty$), 所以極限

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)-F(t-T)}{G(t)-G(t-T)}=l。$$

仔細觀察上式的結構與規律實質上仍保持著定理1中第三條的結構與規律, 即有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t+T)-F(t)}{G(t+T)-G(t)}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)-F(t-T)}{G(t)-G(t-T)}\end{aligned}$$

(這個等式也可以根據極限定義給予證明) 從而

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t+T)-F(t)}{G(t+T)-G(t)}=l$$

可見函數 $F(t)$ 與 $G(t)$ 完全滿足定理1的條件, 使得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t+T)-F(t)}{G(t+T)-G(t)}$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}&=\lim_{t\to+\infty}\frac{F(-t)}{G(-t)}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\end{aligned}$$

故定理3正確。證畢。

定理4: 設 T 爲正常數, 若函數 $f(x)$、$g(x)$, $x\in(-\infty,a)$ 滿足:

(1) $g(x+T)>g(x),\quad x\in(-\infty,a)$
(2) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty, f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 任何子區間上有界;
(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l 同定理1) 則 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

證: 設 $G(x)=-g(x)$ 由已知條件與定理3知本定理成立。

註:

(1) 上述四個定理相應條件不變, 只是將第一條和第三條作如下改動, 則仍有相應的四個定理成立, 即:

(I) $g(x)>g(x-T),\quad x\in(a,+\infty)$ 且當 $x>T$ (或 $g(x)<g(x-T)$, $x\in(-\infty,a)$ 且當 $x<T$)。

(II) $f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ (或 $(-\infty, a)$) 的任一子區間上有界, 且

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} g(x)=+\infty$$

$$(\text{或} \lim_{\substack{x\to-\infty\\(x\to+\infty)}} g(x)=-\infty)。$$

(III) 若 $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)-f(x-T)}{g(x)-g(x-T)}=l$
則 $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}=l$。

(2) 定理1與定理4中的“$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty, a)$ 任何子區間上有界與 $g(x+T)>g(x)$”的條件可用更強的條件“$g(x)$ 嚴格遞增”來代替, 則結論當然成立。

(3) 定理2與定理3中的“$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$ 任何子區間上有界與 $g(x+T)<g(x)$” 的條件可用較強的條件“$g(x)$ 嚴格遞減”來代替, 則結論亦當然成立。

(4) 特別當 $T=1$ 時, 四個定理仍舊成立。

(5) 由註 (2), (3) 與 (4) 知[2] 中的關於 “Stolz 定理的推廣” 是上述四個定理的特殊情況。

上述四個定理用途很廣, 處理問題也就靈活方便, 而且著名的 L'Hospital 法則被順利地納入了 Stolz 定理的推論之中, 並且可減弱 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 L'Hospital 法則的條件, 從下面衆多的命題可以看出這一點。從上述四個定理出發, 我們可以得到下列推論。我們用命題形式表述如下:

命題1: 在定理1中取 $g(x)=x$, 其餘條件不變, 若

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+T)-f(x))=l$$

則 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{l}{T}$$

註: 當 $T=1$ 時, 即爲 [3] 之 p.84 題6與 [4]中的608題與609題 (a)。

命題2: 在定理4中取 $g(x)$, 其餘條件不變, 若

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x+T)-f(x))=l$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{l}{T}$$

註: 當 $T=1$ 時, 命題2就把 [3] 中的 p.84 題6對應擴伸到了 $(-\infty,a)$ 上去了。

命題3: 在定理1中取 $g(x)=x^{m+1}$ (m 爲非負整數) $T=1$ 其餘條件不變, 若 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^m}=l$ 則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{m+1}}=\frac{l}{m+1}$$

註: 此命題3是 [4] 中 610 題, 該命題可以進行下列對應式的擴伸, 即命題4與5。

命題4: 設 $T=1$, 在定理3中取 $g(x)=x^{2k}$ (k爲自然數, 其餘條件不變, 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^{2k-1}}=l$ 則

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{2k}}=\frac{l}{2k}。$$

命題5: 設 $T=1$, 在定理4中取 $g(x)=x^{2k+1}$ (k爲非負整數, 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^{2k}}=l$ 則

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{2k+1}}=\frac{l}{2k+1}。$$

命題6: 設 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的每一個有限子區間上有界, 且 $f(x)\geq c>0$, 若

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=l$ (l 爲有限數或 $+\infty$), 則 $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=l$。

證: 在命題1中取 $T=1$, 視命題1中的 $f(x)$ 爲 $\ln f(x)$ 即可證得。(略)

註:

(1) 該命題6爲 [4] 之608題 (σ),

(2) 當 $f(x)=x$ 時, 則 $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$,

(3) 當 $f(x)=1+a^x(a>1)$, 則 $\lim_{x\to+\infty}(1+a^x)^{\frac{1}{x}}=a$,

(4) 當 $a>b>1$ 時, 利用 (3) 可證 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}=\frac{\ln a}{\ln b}$,

(5) 該命題可以對應擴伸到下列命題7中去。

命題7: 該 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 的任何一個子區間上有界, 且 $f(x)\geq c>0$, 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=l$ (l 同命題6), 則

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=l$$

註: 當 $f(x)=1+a^x(a>1)$, 則

$$\lim_{x\to-\infty}(1+a^x)^{\frac{1}{x}}=1。$$

命題 8:[6] 設數列 $\{x_n\}\{y_n\}$ 滿足

(1) $y_{n+1}>y_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$

(2) $\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$

(3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ (l 同定理1)

證: 此命題實質上是定理1的特例, 由歸結原則即可證得。

註:

(1) 命題8一般文獻上通常稱爲 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 Stolz 公式。

(2) 定理1實質上就是命題8的推廣。

(3) 利用定理2則命題8可以對應擴伸到下列命題9中去。

命題9: 設兩個數列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 滿足:

(1) $y_{n+1}<y_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$

(2) $\lim_{n\to\infty}y_n=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ (l 同定理1),

則 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$

命題10: 設 k 是一個確定的自然數, 由定理1可得:

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+k}-x_n)=l$, 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{l}{k}$。

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-k})=l$, 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{l}{k}$。

命題 11: [4] 在命題10中, 取 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, k=1$, 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$, 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=l$。

推論1: 若 $\{z_n\}$ 爲複數列且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\alpha$ (α 爲限數), 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\alpha$。

推論 2: 若 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 爲複數列, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ (其中 a,b 爲有限複數) 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}=ab。$$

推論3: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B,\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n=AB$ (其中 $C_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$, A、B 爲有限數, $\{a_n\},\{b_n\}$ 爲複數列)。

推論 4: [3][4][10] 設 $\{a_n\}$ 爲實數列, $a_n>0(n=1,2,\ldots,n)$ 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=$

l, 則 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=l$。其中 l 可以為有限數或 $+\infty$)

註: 本文只有推論1、2、3涉及到複數集, 其餘均在實數集內討論。下文所談問題, 皆是實數集內進行討論的, 以後不再聲明。

命題 12[3][4][10], 設 $a_n>0$ 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ 則

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l \ (l \text{ 同推論4})。$$

證法一: 由歸納原則引用命題6即可證得。

證法二: 由推論4立即證得。

推論1: 當 $a_n=n(n=1,2,\ldots)$ 則 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

推論2: 當 $a_n=a(a>0,n=1,2,\ldots)$ 則 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

推論3: 當 $a_n=n!(n=1,2,\ldots)$ 則 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$。

推論4: 當 $a_n=\frac{n!}{n!}(n=1,2,\ldots)$ 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$。

註:

(1) 關於推論1、2、3大部分的數學分析書中都有證明, 但是證明都是較繁冗的。這裡引用了命題12, 問題顯得特別簡單。

(2) 由命題12可知在使用 D'Alembert, J. I. R 法判斷正項級數的斂散性有效, 則使用 Cauchy, A. L. 法一定有效。由於該命題12之逆不成立, 因此在判斷正項級數時 Cauchy, A. L. 法比 D'Alembert, J. L. R 法更有效。

命題13: 設 $p_1,p_2,\ldots p_m,a_1,a_2,\ldots a_m$ 皆為正常數, 則

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ma_m^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n}\\&=\max\{a_1a_2\cdots a_m\}\end{aligned}$$

註: 命題13的左、右兩端可以獨自證明其之極限為 $\max\{a_1a_2\cdots a_m\}$, 然而可以先證 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n}=\max\{a_1a_2\cdots a_m\}$, 爾後證明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ma_m^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n}$$

其極限存在, 再由命題12知其極限為 $\max\{a_1a_2\cdots a_m\}$。這樣做似乎對本命題13的解決顯得過繁, 事實上, 本命題是命題12的特例, 但是對本問題推論1的解決極具啓發式。

證: 設 $b_n=p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n$, 則由 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned}b_n^2&=(p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n)^2\\&=[(p_1^{\frac12}a_1^{\frac{n-1}{2}})(p_1^{\frac12}a_1^{\frac{n+1}{2}})+\cdots\\&\quad+(p_m^{\frac12}a_m^{\frac{n-1}{2}})(p_m^{\frac12}a_m^{\frac{n+1}{2}})]^2\\&\le(p_1a_1^{n-1}+\cdots+p_ma_m^{n-1})\\&\qquad\times(p_1a_1^{n+1}+\cdots+p_ma_m^{n+1})\\&=b_{n-1}b_{n+1}\end{aligned}$$

令 $d_n=\frac{b_{n+1}}{b_n}$, 則 $d_{n+1}\ge d_n(n=1,2\cdots)$ 且 $d_n\le M$, 故據單調有界原理知 $\{d_n\}$ 收斂, 即 $\lim_{n\to\infty}d_n$ 存在正常極限。由命題12知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$, 存在且 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}n$,

又因爲 $\lim\limits_{\infty\to n}\sqrt[n]{p_1a^n+\cdots+p_ma_m^n}=\max\{a_1a_2\cdots a_m\}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\cdots+p_ma_m^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\cdots+p_ma_m^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_1a^n+\cdots+p_ma_m^n}$$
$$=\max\{a_1\cdots a_m\}$$

推論1: 若 $\varphi,f\in C[a,b]$, $\varphi(x)>0$, $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^{n+1}dx}{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^ndx}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^ndx}$$
$$=\max_{x\in[a,b]}f(x)=f(x_0)\ \text{其中}x_0\in[a,b]$$

推論2: $\varphi(x),f(x)$ 同推論1, 則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^{n+1}dx}{\int_a^b\varphi(x)(f(x))^ndx}\text{發散。}$$

註:

(1) 關於推論1的證明, 只需取 $b_n=\int_a^b\varphi(x)(f(x))^ndx$, 利用積分型的 Cauchy 不等式, 則其證法完全類同於命題13, 這裡略去證明。(2) 利用命題6彷照命題13的證法, 可以很順利地研究出下列問題。

(I) 設 $a_i>0,a_i>0(i=1,2,\cdots m)$

$$\varphi(t)=(\frac{q_1a_1^t+q_2a_2^t+\cdots+q_ma_m^t}{q_1+q_2+\cdots+q_m})^{\frac{1}{t}}$$

則 $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\max\{a_1a_2\cdots a_m\}$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=\min\{a_1a_2\cdots a_m\}$,

$$\lim_{t\to0}\varphi(t)=(\prod_{i=1}^m a_i^{q_i})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^M q_i}}$$

(II) 設 $f(x)$、$p(x)$ 皆在 $[a,b]$ 上連續恆正,

$$\psi(x)=(\frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b p(x)(f(x))^tdx)^{\frac{1}{t}}$$

則 $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)=\max_{x0\in[a,b]}f(x)$, $\lim_{t\to-\infty}\psi(t)=\min_{x0\in[a,b]}f(x)$

$$\lim_{t\to0}\psi(t)=e^{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx/\int_a^b p(x)dx}$$

請注意: 與II中相類似的這樣兩個問題曾經 1977年前蘇聯大學生競賽試題 [7], 即
(a) 求 $\lim_{n\to\infty}(\int_0^1\sqrt[n]{f(x)}dx)^n$ =? (其中 $f\in C[0,1],f(x)>0$)
(b) 求$\lim_{p\to+\infty}(\int_0^1|f(x)|^pdx)^{\frac{1}{p}}$ =? (其中 $f\in C[0,1]$)

命題14 $(\frac{\infty}{\infty})$ L'Hospital 法則: 若
(1) $\lim_{n\to+\infty}g(x)=+\infty(\text{或}-\infty)$,
(2) $f(x)$ 在 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可導, $g'(x)\neq0$,
(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$同定理1)
則 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

證: 由 Darboux 定理 [3]p.159和定理1知當 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 與條件 (2)(3) 之下, 命題14成立, 由 Darboux 定理和定理2知當 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ 與條件 (2)(3) 之下, 本命題成立。

命題15: $(\frac{\infty}{\infty})$ L'Hospital 法則, 若
(1) $\lim_{x\to x_0^+}g(x)=+\infty$ (或 $-\infty$)。
(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 (x_0,x_0+h) 內可導, $g'(x)\neq0(h>0)$。
(3) $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$同命題14)。

則 $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

證: 令 $x=\frac{1}{t}+x_0$ 則 $x\to x_0^+\Leftrightarrow t\to+\infty$, 於是由命題14即可證得。

命題16: $(\frac{\infty}{\infty})$ L'Hospital 法則, 若

(1) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$(或 $-\infty$)。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 內可導, $g'(x)\neq 0$。

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$同命題15)

則 $\lim_{k\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

證: 由 Darboux 定理和定理3知當 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ 與條件 (2)(3) 之下, 本命題成立。由 Darboux 定理和定理4知當 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ 時與 (2)(3) 條件之下, 該命題16成立。

命題17 $(\frac{\infty}{\infty})$ L'Hospital 法則: 若

(1) $\lim_{x\to x_0^-}g(x)=+\infty$(或 $-\infty$)。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 (x_0-h,x_0) 可導, $g'(x)\neq 0(h>0)$。

(3) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$同命題16),

則 $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

證: 令 $x=x_0+\frac{1}{t}$, 則 $x\to x_0^-\Leftrightarrow t\to-\infty$ 由命題16知命題17成立。

註: 此處 L'Hospital 法則與一般分析教科書中的 $(\frac{\infty}{\infty})$ 型的 L'Hospital 法則不完全相同, 因爲此處 $(\frac{\infty}{\infty})$ 型的 L'Hospital法則並沒有要求

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)\\(x\to x_0^+)\\(x\to x_0^-)}}f(x)=+\infty(\text{或}-\infty\text{或}\infty)$$

可見本文減弱了現行的分析教科書中的 $(\frac{\infty}{\infty})$ 型的 L'Hospital 的一個條件。這樣在使用時就方便得多, 就可以簡化某些極限問題的證明。

命題18: 若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 內可微, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 則$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, 或 $f(x)=o(x)(x\to+\infty)$。

證: 方法一, 在命題14中取 $g(x)=x$, 則 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, 於是由命題14與已知條件得知有:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(x)'}\\&=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\end{aligned}$$

故本命題成立。

方法二, 因爲 f 在 $(a,+\infty)$ 可微, 所以對於 $[x,x+1]\subset(a,+\infty)f(x)$ 也可微。由拉格朗日中值定理得: $f(x+1)-f(x)=f'(\eta)$, 其中 $\eta\in(x,x+1)$, 於是 $x\to+\infty\Leftrightarrow\eta\to+\infty$, 由 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 知 $\lim_{\eta\to+\infty}f'(n)=0$, 從而 $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$, 故由命題1(取 $T=1$) 即得 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

命題19: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 內可導, $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$, 則 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

證: 方法一, 取 $g(x)=x$, 由已知條件與命題16便知本命題19成立。

證法二, $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 可導, 於是對於 $[x,(x+1)]\subset(-\infty,a)$, 使用拉格朗日

微分學中值定理得 $f(x+1)-f(x)=f(\eta)$ 其中 $x<\eta<x+1, x\to -\infty \Leftarrow \eta \to -\infty$, 故 $\lim_{x\to-\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{\eta\to+\infty} f'(\eta)=\lim_{x\to-\infty} f'(x)=0$, 所以由命題1$(T=1)$ 得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0。$$

命題20: 若函數 $f(x)$ 是周期爲 $T(T>0)$ 的連續函數, 則
$\lim_{x\to+a}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$。

證: 設 $F(x){=}\int_0^x f(t)dt$, 則 $F(x{+}T){=}\int_0^{x+T} f(t)dt$, 因爲 $f(x)$ 是周期爲 $T(T>0)$ 的連續函數, 於是知 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可導, 可見 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上任何閉子區間上有界, 顯然 $F(x{+}T){-}F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(x)dx$ (據周期函數的性質) 取 $g(x)=x$, 則有 $g(x+T)-g(x)=T>0$, 因之 $g(x+T)>g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x+T)-F(x)}{g(x+T)-g(x)}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$, 故由定理1, 得知: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$。

註:

(1) $f(x)$ 的條件同命題20, 則有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dt$$

(2) 上述三個命題皆爲研究生入學試題。由於這裡應用了定理1和命題14和16, 使之解法簡單得多了。這裡解法與 [8]中的解法不同, 這裡解法比 [8]之方法簡單得多。

命題21: 若 $f\in C[0,+\infty]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$$

證法一: 因爲 $f\in C[0,+\infty)$, 所以 $\int_0^x f(t)dt$ 可導, 現在命題14中取 $g(x)=x$, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $g'(x)=1$, 從而由命題 14 知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A。$$

證法二: 設 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 則 $F(x+1)-F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt=f(\eta)$, 其中 $x\to+\infty \Leftrightarrow \eta\to+\infty$ 可見 $\lim_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))=\lim_{\eta\to+\infty} f(\eta)=\lim_{x\to\infty} f(x)=A$。由 $f\in C[0,+\infty)$ 知 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何有限子區間上有界, 從而據命題, $(T=1)$ 知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=A,$$

證畢。

註: 該命題的條件可以放寬, 於是有:

設在任意有限區間 $[0,R]$ 上, $f(x)$ 恆爲可積函數, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, 則 $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |f(x)|dx=0$

證: 因爲 $f(x)$ 在任何有限區間 $[0,R]$ 上恆可積, 所以 $\int_0^t (f(x))dx$ 關於 t 是連續的。

取 $F(t)=\int_0^t |f(x)|dx$, 則 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 任何有限子區間上有界, 且 $F(t)$ 在 $t>0$ 時遞增, 而 $0\le F(t+1)-F(t)=\int_t^{t+1}|f(x)|dx$, 當 t 充分大時, 由於 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, 即 $\forall\varepsilon>0$,

$\exists t > 0$, 當 $x > t$ 時, $|f(x)| < \varepsilon$, 於是 $0 \leq F(t+1) - F(t) < \varepsilon$, 進而有 $0 \leq \overline{\lim}_{x\to+\infty}(F(t+1)-F(t)) \leq \varepsilon$, 由 ε 之任意性知 $\overline{\lim}_{t\to+\infty}(F(t+1)-F(t)) = 0$, 所以 $\lim_{t\to+\infty}(F(t+1)-F(t)) = 0$, 由命題1得知

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |f(x)|dx = 0$$

請注意命題21之逆不眞, 即由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。但若適當增加條件, 則有下列兩個命題成立:

命題22: 設函數 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上連續可微, 並且滿足下列條件:

(1) $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq \frac{c}{x}$ (對於所有的 $x > 0, \exists c > 0$)

(2) $\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^R |f(x)|dx = 0$

則 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

命題23: 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 不減, 對所有的 $T > 0$, $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可積, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A$, 則 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。

註: 想了解該命題23、24之證明, 請見 [7]。

上面我已經列舉了二十三個命題。可見該文定理1 與拓廣後的幾個定理的應用是多麼廣泛! 餘味未盡, 我們可以利用上述定理與有關命題解決下列諸問題。這裡用例題形式寫在下面:

例一: 若 $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n(1-x_n)(n = 1,2,3\cdots)$ 則 $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$。

例二: 設數列 $x_1 = \sin x$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n = 1,2,3\cdots$ 若 $\sin x > 0$, 則 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n = 1$。

例三: 討論級數 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^s$ 的斂散性, 其中 $x_1 = \sin x > 0$, $x_{n+1} = \sin x_n, n = 1,2,3\cdots$

註: 請注意如何由數列問題產生級數問題。

例四: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $p_{n+1} \geq p_n > 0, n = 1,2,3,\ldots, \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1 + p2a_2 + \cdots + p_2a_n}{p_n} = 0。$$

註: 該例當 $p_{n+1} \leq p_n < 0$, $n = 1,2,3\ldots, \lim_{n\to\infty} p_n = -\infty$, 則例四仍舊成立。

例五: 設實數列 $\{s_n\}$ 的算術平均數 σ_n 爲

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, n = 0,1,2\ldots$$

對 $n \geq 1$, 令 $a_n = s_n - s_{n-1}$。

證明: 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 且 $\{\sigma_n\}$ 收斂, 則 $\{s_n\}$ 收斂, 且 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n$。

註: 該例 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 的條件是可以放寬的。只要恆有: $n(s_n - s_{n+1}) < K$ 或者恆有 $n(s_{n+1} - s_n) < K$ 這裡 K 是某一個正常數, 則命題仍眞。這即著名的 Hardy 與 Landau 定理。

例六: 設已給兩個數列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 滿足條件:

(1) $b_n > 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, 且 $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ 發散,

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$ 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n} = s$$

註: 該例當 $b_n < 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 發散, 餘者不變, 則結論仍眞。

例七: 設 $b_k > 0$, $k = 1,2,3,\ldots$ $p_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ 且 $\{p_n\}$ 發散, 若 $\lim_{n\to\infty} b_n p_n^{-1} = 0$, 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1p_1^{-1} + b_2p_2^{-1} + \cdots + b_np_n^{-1}}{\ln p_n} = 1。$$

註: 當 $b_k = 1$, $k = 1,2,3,\ldots$, 則有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1。$$

例八: 設 $p_k > 0$, $q_k > 0$, $k = 1,2,3\ldots$ 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{np_n} = \alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{nq_n} = \beta,$$

(α 與 β 爲有限數, 且 $\alpha + \beta > 0$) 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1q_1+2p_2q_2+\cdots+np_nq_n}{n^2p_nq_n} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$,

例九: [11] 若 $s_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln C_n^k}{n^2}$, 則 $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$。

例十: 若 $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1+\sin(a_n - 1)$, $n = 0,1,2,3,\ldots$ 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} = 1$$

例十一:設 $\{y_n\}$ 爲數列, $f_n(x) = e^{\frac{x}{n+1}}$, $n = 1,2,3,\ldots$ 若 (1) $y_1 = c > 0$, (2) $\frac{n}{n+1}\int_0^{y_{n+1}} f_n(x)dx = y_n$ ($n = 1,2,3,\ldots$ 則

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 2。$$

例十二: 若 $\lim_{n\to\infty}(\lambda(a_{n+1} - a_n) + (1-\lambda)\frac{a_n}{n} = l$ 其中 $\lambda > 0$, l 爲有限數, 則

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l。$$

註: 該例十二能否推廣到:

若 $y_{n+1} > y_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(\lambda\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} + (1-\lambda)\frac{x_n}{y_n}) = l(\lambda > 0)$, 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+a}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$ 呢? 但有下面這個例題的推廣:

例十三: 設 $\{x_n\}$ 是有界數例, $a_n > 0$, $n = 1,2,3\ldots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,$a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + (1-a)\sum_{k=1}^{n} a_kx_k / \sum_{k=1}^{n} a_k) = l$$

則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

關於上面例題的證明,(除例十三外) 可以參見 [1][10][11]。

例十四: 若 $a_n > 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$ 則 $a_n = O(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}})$ ($\varepsilon > 0$)。

例十五: 設 $a_n > 0$, $n = 1,2,3\ldots$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = l$。

註:

(1) 當 $a_k = k$, $k = 1,2,\ldots$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n} = l。$$

(2) 當 $a_n=1$, $n=1,2,3,\ldots$, 例十五便成了命題11。

(3) 當 $a_k<0$, $k=1,2,3,\ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=-\infty$。若 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$ 則結論仍立。

例十六 [8] : 若數列 $\langle x_n\rangle$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0。$$

證: 由 Stolz 公式知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-2}}{n-(n-2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}-x_{n-3}}{n-1-(n-3)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-3})=0$ 故命題成立。

通過上述的許多命題和例題可以看出: 這些"東西" 都是從定理1展開並進行適當的對應式的延伸與拓廣隨之"順手牽羊" 得來的。同時看到這方面的內容很豐富。若讀者感興趣的話, 還可以研究下去, 從某種意義上來說, 上述的命題都可以認爲是研究 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的極限問題。寫到這裡, 人們不禁要問: 能否有 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 推廣定理呢? 回答是肯定的。這裡首先介紹 [1]中的 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理 (推廣形式) 並取名定理5。然後仿照定理1進行對應式擴伸等工作。

定理5 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 推廣定理): 設 T爲正常數, 若函數 $f(x)$, $g(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 滿足:

(1) $0<g(x+T)<g(x)$, $x\in(a,+\infty)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l有限數或 $+\infty$ 或 $-\infty$)

則 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)=l}$。

定理5可以對應式擴伸到三個定理之中:

定理6: 設T爲正常數, 若函數 $f(x)$、$g(x)$, $x\in(-\infty,0)$ 滿足:

(1) $0>g(x+T)>g(x)$, $x\in(-\infty,0)$;

(2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l同定理5)

則 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

定理7: 設 T 爲正常數, 若函數 $f(x)$、$g(x)$, $x\in(a,+\infty)$ 滿足:

(1) $0>g(x+t)>g(x)$, $x\in(a,+\infty)$;

(2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l同定理5)

則 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

定理8: 設 T 爲正常數, 若函數 $f(x)$、$g(x)$, $x\in(-\infty,a)$ 滿足:

(1) $0<g(x+t)<g(x)$, $x\in(-\infty,a)$;

(2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l同定理5)

則 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

關於定理 6、7、8 的證明, 可以仿照定理 2、3、4 的證明, 即可證得。這裡從略。同樣仿照定理 1∼4 也有下列的應用之命題。

命題 24 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) : 設 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$, $b_{n+1}<b_n(n=1,2,3,\ldots)$ 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$ (l 同定理5), 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l。$$

證: 因爲 $b_{n+1} < b_n$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 所以 $b_n > 0$。從而 $0 < b_{n+1} < b_n$, 於是取 $f(x) = a_n$, $g(x) = b_n$, $x \in [n, n+1]$, 則 $\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 又由 $g(x) = b_n$ 知 $0 < g(x+1) < g(x)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-b_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} = l$, 由定理 5 得 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 即 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ 證畢。

註: 這個命題 24 中的 $\{b_n\}$ 可以換爲嚴格遞增趨於 0 的數列, 則結論仍成立。

我們可以利用上述 5-8 證出各種 $\frac{0}{0}$ 型的 L'Hospital 法則。現開列如下。略去證明。

命題 25: ($\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法則)

一、若:

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可導, 且 $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l 同定理 5),

則 $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

二、若:

(1) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 (x_0, x_0+h) 可導 $g'(x) \neq 0$ $(h > 0)$。

(3) $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g(x)} = l$,

則 $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

三、若

(1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$。

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 內可導, $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

則 $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

四、若

(1) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x) = 0$,

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 (x_0-h, x_0) 可導, $g'(x) \neq (h > 0)$,

(3) $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$,

則 $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$。

本文一共論述了八個定理二十五個命題與部份推論以及十五個例題和一些註記。然而這些問題基本上圍繞著兩個問題 $\frac{\infty}{\infty}$ 與 $\frac{0}{0}$ 型的極限問題而舖開的。並且這衆多的命題都從屬於定理1-8。在這個系統下, 那些著名的 L'Hospital 法則都是定理1-8的特殊情況, 並且很方便地巧妙地解決了一些國外大學生競賽試題和國內研究生入學試題。值此, 建議在編著數學分析教材時, 將定理1與定理5吸收進去, 這樣有利於零星的極限問題的系統化。這裡是作者在教學研究中的心得體會, 有些命題的取材大多是高於 [4], 有個別問題還高於當今世界名著 [10]中的問題的難度。由此可見, 對於定理1與定理5的對應擴伸拓廣是很有意義的。同時説明如何挖掘一個定理或者一個命題或者一道習題的深度與廣度的方法是何等重要! 這對於當前積極發展學生智力, 引導學生寫小論文, 培養學生的科研能力與反對一味題海戰術來說, 此法是值得研究的。

参考文獻

1. 孫本旺等編, 數學分析中的典型例題與解題方法, 湖南科學技術出版社, 1984年4月。

2. 李俊傑, Stolz 定理的推廣, 數學通報1981年3期。
3. 華東師大編, 數學分析 (上), 高等教育出版社, 1994年4月第4次印刷。
4. (前蘇)B. 吉米多維奇著, 李榮凍譯, 數學分析習題集, 人教社出版。
5. 吉林大學編, 數學分析。
6. Gabriel Klambauer, Mathematical Analysis。
7. (前蘇)B. A. 薩多夫尼契, A. C. 波德科赤津編, 朱克辰譯, 大學生數學競賽題解匯集。
8. 鄒節銑、陳強編,1978-1983年全國招考研究生高等數學試題選解, 湖南科技出版社。
9. (前蘇)TM 菲赫金哥爾茨著, 葉彥謙譯, 微積分學教程, 一卷一分册, 人教社出版。
10. G. Pólya. G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis, Vol.1, Spinger-Verlay-Berlin, 1972.
11. American Mathemeticu Monthey, 1963.

—本文作者任教於中國阜陽師範學院數學系—