Cantor函數的分析性質及其用於反例

胡紹宗

Cantor函數不止一種, 本文僅就用 Cantor 三分集構造出來的 Cantor 函數加以討論。

1. 定義

設 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, 則

$$\begin{aligned}G &= [0,1]-c\\ &=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})\cup(\frac{1}{27},\frac{2}{27})\\ &\quad\cup(\frac{7}{27},\frac{8}{27})\cup(\frac{19}{27},\frac{20}{27})\cup(\frac{25}{27},\frac{26}{27})\cup\cdots\end{aligned}$$

在 $[0,1]$ 上定義函數如下:

$$\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\epsilon(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\\ \frac{1}{4}, & x\epsilon(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\\ \frac{3}{4}, & x\epsilon(\frac{7}{9},\frac{8}{9})\\ \frac{1}{8}, & x\epsilon(\frac{1}{27},\frac{2}{27})\\ \frac{3}{8}, & x\epsilon(\frac{7}{27},\frac{8}{27})\\ \frac{5}{8}, & x\epsilon(\frac{19}{27},\frac{20}{27})\\ \frac{9}{8}, & x\epsilon(\frac{25}{27},\frac{26}{27})\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

一般地, 在長度爲 $\frac{1}{3^n}$ 的 2^{n-1} 個開區間上, 令 $\theta(x)$ 依次取値 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$, 等等, 當 $x_0\epsilon c$ 時, 令 $\theta(x_0)=\sup\limits_{\substack{x\in G\\ x<x_0}}\{\theta(x)\}$, $\theta(0)=0$, $\theta(1)=1$。我們稱 $\theta(x)$ 爲 Cantor 函數。

2. 分析性質

(i) 容易看出, $\theta(x)$ 是 $[0,1]$ 上的增加函數, 且 $\theta([0,1])=[0,1]$, 因此 $\theta(x)$ 沒有跳躍間斷點。而單調函數除了跳躍間斷點以外, 不能有別的間斷點。所以 $\theta(x)$ 是 $[0,1]$ 上連續的增加函數。

(ii) 由於 $\theta(x)$ 在 G 上是局部常値函數, 即在 G 上有 $\theta'(x)=0$, 又 $mc=0$, 所以在 $[0,1]$ 上 $a.e.$ 有 $\theta'(x)=0$ 。

(iii) 因爲 $\theta(x)$ 在 $[0,1]$ 上 R 可積, 從而 L 可積, 且 $\int_0^1\theta(x)dx=\frac{1}{2}$。

3. 應用舉例

例 1: 絕對連續函數顯然是在通常意義下的連續函數, 其逆不眞, 例如, Cantor函數 $\theta(x)$ 在 $[0,1]$ 上連續, 但非絕對連續。這是由於 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上絕對連續的充要條

件是 $\int_0^1 f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 成立。而對於 $\theta(x)$ 卻有 $\int_0^1 \theta'(x)dx = 0 < 1 = \theta(1) - \theta(0)$ 。

例2: 設 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的絕對連續函數, $E \subset [0,1]$ 且 $mE = 0$, 則 $mf(E) = 0$ 如果把 $f(x)$ 改爲連續函數, 則結論是否一定成立?

證: 因 $mE = 0$, 故對任意 $a > 0$, 存在一列互不相交的開區間 $\{(a_n, b_n)\}$, 使 $\cup_n(a_n, b_n) \supset E$ 並有 $\sum\limits_n m(a_n, b_n) < a$; 又 $f(x)$ 絕對連續, 故對任意 $b > 0$, a 可以選得使

$$\sum_n |f(b_n) - f(a_n)| < b$$

對於每個 n, 在 $[a_n, b_n]$ 中存在點 c_n 與 d_n 使

$$\begin{aligned} f(c_n) &= \min_{a_n \le x \le b_n} f(x), \\ f(d_n) &= \max_{a_n \le x \le b_n} f(x), \end{aligned}$$

於是由 $\sum\limits_n |d_n - c_n| \le \sum\limits_n m(a_n, b_n) < a$, 得

$$\sum_n [f(d_n) - f(c_n)] < b;$$

另一方面, 又由 $f(E) \subset f[\cup_n(a_n, b_n)] = \cup_n f[(a_n, b_n)]$, 可得

$$\begin{aligned} mf(E) &\le mf[\cup_n(a_n, b_n)] \\ &= m \cup_n f[(a_n, b_n)] \\ &\le \sum_n mf[(a_n, b_n)] \\ &= \sum_n [f(d_n) - f(c_n)] \end{aligned}$$

從而 $mf(E) < b$, 即 $mf(E) = 0$。

若將 $f(x)$ 換成連續函數, 則結論不一定成立。例如,Cantor 函數 $\theta(x)$ 就是如此。易知 $\theta(x)$ 在 G 上只取可數個值, 由於 $\theta(x)$ 的連續性, 所以這可數個值在 G 的構成區間的端點上都可取到, 又這些端點均屬於 C, 從而 $\theta(C) = [0,1]$, 於是雖有 $mc = 0$, 但 $m\theta(C) = m[0,1] = 1$。

例3: 設函數 $y = f(x)$ 在 E 上可測, E_1 爲 Y 軸上的任意可測集, 問集 $f^{-1}(E_1)$ 是否必定可測, 即可測集的原像是否必定可測?

解: 不一定, 考察函數 $y = \varphi^{-1}(x) = x + \theta(x)$, 這裡 $\theta(x)$ 爲 Cantor 函數, 已知其單調增加且連續, 從而 $\varphi^{-1}(x)$嚴格增加並連續。φ^{-1} 把 x 軸上的閉區間 $[0,1]$ 一一映到 Y 軸上的閉區間 $[0,2]$, 同時把 Cantor 集的餘集 G 中的每一個開區間變成同樣長度的開區間, 事實上,

由 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ 得

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < x + \theta(x) < \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6};$$

由 $\frac{1}{7} < x < \frac{2}{9}$ 得

$$\frac{13}{36} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} < x + \theta(x) < \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36};$$

由 $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$ 得

$$\frac{55}{36} = \frac{7}{9} + \frac{3}{4} < x + \theta(x) < \frac{8}{9} + \frac{3}{4} = \frac{59}{36};$$

$\cdots \qquad \cdots$

因此 $m\varphi^{-1}(G) = mG = 1$, 而 cantor 集 C 變成 $[0,2]$ 的閉子集 F, 即 $F = \varphi^{-1}(c)$,

於是 $[0,2]=\varphi^{-1}(G)\cup\varphi^{-1}(C)$ 且

$$\varphi^{-1}(G)\cap\varphi^{-1}(C)=\phi,$$

$$\begin{aligned} mF &= m\varphi^{-1}(C) \\ &= m[0,2]-m\varphi^{-1}(G)=2-1=1。\end{aligned}$$

如前所述 $\varphi^{-1}(x)$ 嚴格增加且連續, 故存在嚴格增加且連續的反函數, 記爲 $x=\varphi(y)$, 它把 y 軸上閉區間 $[0,2]$ 一一映到 x 軸上的閉區間 $[0,1]$; 同時把 F 變爲 C, 即 $C=\varphi(F)$。

因爲不是零集的任何可測集均含有不可測集, 所以存在不可測集 $A\subset F$, 從而 $\varphi(A)\subset\varphi(F)=C$ 。但零集的任何子集是零集, 可見 $B=\varphi(A)$ 爲零集因而可測, 然而它的原像 $A=\varphi^{-1}(B)$ 不可測。

例4: 設 $x=\varphi(t)$ 是 $E=[\alpha,\beta]$ 上的可測函數, $E_1=\varphi(E)$, 又 $y=f(x)$ 是 E_1 上的連續函數, 則複合函數 $y=f[\varphi(t)]$, 在 E 上必可測, 即可測函數的連續函數必可測。若將 $x=\varphi(t)$ 改爲連續函數, 而把 $y=f(x)$ 換成可測函數, 則結論如何, 即連續函數的可測函數是否必定可測?

證: 因 $y=f(x)$ 在 E_1 上連續, 故對任一開集 G, $f^{-1}(G)$ 爲開集; 又由 $x=\varphi(t)$ 在 E 上可測可知 $\varphi^{-1}[f^{-1}(G)]$ 是可測集。特別對任意實數 a, 取 $G=(a,+\infty)$, 則 $E[f[\varphi(t)]>a]=\varphi^{-1}[f^{-1}(G)]$ 可測, 從而 $y=f[\varphi(t)]$ 在 E 上可測。

若將 $x=\varphi(t)$ 改成連續函數, 而把 $y=f(x)$ 換成可測函數, 則結論不一定成立。

設 $\theta(x)$ 爲 Cantor 函數, 則函數 $t=\varphi^{-1}(x)=x+\theta(x)$ 在閉區間 $[0,1]$ 上嚴格增加且連續, 其值域爲閉區間 $[0,2]$, 從而必存在反函數, 記爲 $x=\varphi(t)$, 它在閉區間 $[0,2]$ 上連續, 其值域爲閉區間 $[0,1]$ 。由例3已知 $[0,1]$ 有一可測子集 B, 其原像 $A=\varphi^{-1}(B)$ 是 $[0,2]$ 的不可測子集。

令

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\in[0,1]-B\end{cases}$$

則它是可測集 B 的特徵函數, 因而在 $[0,1]$ 上可測。但複合函數 $y=f[\varphi(t)]$ 不可測。這只須證明

$E[f[\varphi(t)]>0](E=[0,2])$ 不可測。事實上, $y>0$ 等價於 $x\epsilon B$, 而使 $x\epsilon B$ 的 t 所成之集爲 A, 從而使 $f[\varphi(t)]>0$ 的 t 所成之集爲 A, 即 $A=E[f[\varphi(t)]>0]$ 不可測。

参考文獻

1. 周民強編, 實變函數, 北京大學出版社, 1958年10月。
2. B. Gelbaum, 實分析習題及解答, 陝西人民教育出版社, 1988年8月。

—本文作者任教於中國安徽阜陽師範學院—