發現數學真理的一把鎖匙
—— 老調新彈類比法

殷堰工

阿凡提是維吾爾族人智慧的化身, 有這樣一則傳說來描繪他的聰穎: 尖刁、刻薄的旅店老板想敲榨一個忠厚的農民, 強詞奪理地把三年前被吃去的 (價值2圓) 一只雞, 硬算成1000圓, 向法院起訴。其理由是:“如果這只雞還活著, 該生多少蛋, 這些蛋孵成小雞長大, 又要生蛋, 蛋生雞、雞生蛋 ···”, 受賄的法官準備受理此案。阿凡提被農民聘請爲“辯護律師”。阿凡提出庭時故意遲到, 說是爲了把麥子炒熟播種而耽擱了時間。當法官厲聲斥責阿凡提用炒熟的麥子播種胡說八道時, 阿凡提反問:“炒熟的麥種不出小麥, 煮熟的雞怎能生蛋呢?” 法官和老板被駁得理屈詞窮, 醜態百出。結果, 官司爲農民所打贏。

這只是一則民間的傳說而已, 透過傳說本身, 我們看到的是阿凡提在法庭上運用的“類比法”進行推理, 勝利的關鍵在于阿凡提巧妙地用了“類比方法”。

類比法與現代科技發明

什麼是類比法, 按照通用的邏輯教材的定義是:“我們觀察到兩個或兩類事物在許多屬性上都相等, 便推出它們在其它屬性上也相同, 這就是類比法。” 對類比法, 中世紀數學家 Kepler(1571-1630) 推崇倍至, 他說過:“我珍視類比勝於任何別的東西, 它是我最可信賴的老師, 它能揭示自然界的秘密。” 誠言斯哉! 翻開現代科學技術發明的史册, 類比法功勛卓著, “近代仿生學”就是建立在類比推理原則上的成功典例。仿生學是用“生物機制”作類比。譬如, 見到燕子的飛翔, 就想到設計滑翔機和飛機; 看到魚的浮沉想到設計潛水艇; 看到螻蛄的鑽洞想到製造挖土機; 觀察到蠶的吐絲就發明人造絲工程等等。

十七世紀解析幾何學的誕生引起了數學的深刻革命, 發明者 Descartes (1596-1650) 用的也是類比原理。據說, Descartes 在觀察蜘蛛織網時產生了靈感, 因而萌發了建立直角坐標系的設想。蜘蛛網由經線、緯線

編織而成, 憑借這些經緯線蜘蛛能爬行到網的任意位置。於是, Descartes 就用無數條平行線和垂直線織成了坐標網, 建立起點與有序數對之間的對應關係, 從而在數與形之間架起了一座橋樑。

值得提及的是類比法不僅用在科技發明中, 在文學中也時常可見。例如, 人們都說杭州西湖美如畫, 何以爲憑? 有佳對爲證:"水水山山處處淸淸秀秀, 晴晴雨雨時時好好奇奇。" 一些有趣的對子也多用類比法, 再舉一則, 可見一斑。"海水朝, 朝朝朝, 朝朝朝落; 浮雲長, 長長長, 長長長消。" 眞是對仗工整, 不失爲絕妙佳對。

可見, 類比法能啓迪人們的思維, 引發人們的聯想, 促進人們去探求問題, 發現眞理。

數學中的類比法

在數學中, 根據類比法去解決問題和發現眞理, 更是到處可見。

1. 一個重要的例子

例1:求無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。

這個求和問題是 Bernuli (1654–1705) 公開徵解的, 這位瑞士著名的數學家在求得了不少無窮級數的和數後, 對由自然數倒數的平方所組成的級數始終不得其解。一個世紀後, 這個在當時被認爲是"超級難題"爲天才的數學家 Euler (1707–1783) 所攻克。Euler 大膽地將"有限"與"無限"進行類比, 通過聯想, 利用已有的數學模型解決了問題。他的處理方案是這樣的:

聯想模型之一: 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次代數方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 的 n 個不等於零的根, 則方程式的左邊 n 次多項式可分解成積因式 $a_0(1-\frac{x}{\alpha_1})(1-\frac{x}{\alpha_2})\cdots(1-\frac{x}{\alpha_n})$。考慮特殊情況, 若某一多項式方程的根兩兩互爲相反數: β_1、$-\beta_1,\beta_2$、$-\beta_2,\cdots,\beta_n$、$-\beta_n$, 則相應的 $2n$ 次多項式可分解成積因式 $a_0(1-\frac{x^2}{{\beta_1}^2})(1-\frac{x^2}{{\beta_2}^2})\cdots(1-\frac{x^2}{{\beta_2}^n})$, 其中二次項 x^2 的係數 $a_0=-a_0(\frac{1}{{\beta_1}^2}+\frac{1}{{\beta_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{\beta_n}^2})$。

聯想模型之二: 三角方程 $\sin x=0$ 的根爲 $0,\pi,-\pi,2\pi,-2\pi,\cdots,n\pi,-n\pi,\cdots$ 將 $\sin x=0$ 看作是一個"無限次方程", 於是, 方程 $\frac{\sin x}{x}=0$ 的根爲 π, $-\pi$, 2π, $-2\pi,\cdots,n\pi$, $-n\pi,\cdots$。將以上兩個聯想的"有限"與"無限"類比, 構成等式 $\frac{\sin x}{x}=a_0(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})\cdots(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})\cdots$, 這個"多項式"的"二次項 x^2"的係數爲

$$\begin{aligned}&-a_0(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\pi^2}+\cdots)\\&=\frac{-a_0}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots)\end{aligned}$$

聯想模型之三: 冪級數展開式

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots,$$

其中"二次項 x^2"的係數是 $\frac{-1}{3!}=\frac{-1}{6}$, 比較係數得

$$\frac{-a_0}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots)=\frac{-1}{6}。$$

不失一般性, 設 $a_0=1$, 則

$$\frac{1}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+"\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots)=\frac{1}{6},$$

即

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

2. 一個著名不等式

例2: 假設 x、y 爲非負數, 則由 $(x-y)^2 \ge 0$ 得 $\frac{1}{2}(x^2+y^2) \ge xy$, 其依據是 $x^2+y^2-2xy \ge 0$。

由此產生類比聯想: 對於非負數 z, 是否有 $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) \ge xyz$? 嘗試之, $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \ge 0$。

更進一步地類比及推廣, 便有著名的不等式 $\frac{1}{n}({x_1}^n+{x_2}^n+\cdots+{x_n}^n) \ge x_1x_2\cdots x_n$, 其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 皆爲非負)。若記 $A_1={x_1}^n,\cdots,A_n={x_n}^n$, 則得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A_i \ge \sqrt[n]{\pi_{i=1}^n A_i}$, 這就是算術平均值不小於幾何平均值的基本不等式。

3. 對於類比法的再定義

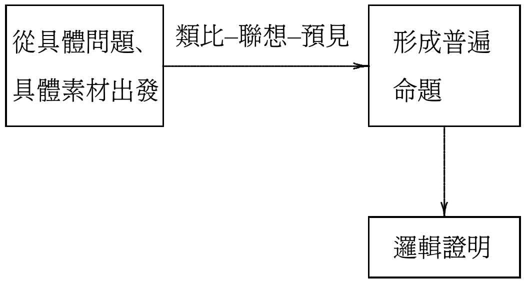
從上面兩個例子我們可以發現類比法其實是這樣一種推理: 根據 A、B 兩個不同對象具有某些相似的性質, 而且已知 A 還具有其他性質, 由此推出 B 也具有其他相似的性質。它可以用公式表示如下:

$$\text{根據:}\begin{cases}\text{對象 A 具有性質}a、b、c、d;\\ \text{對象 B 具有性質}a'、b'、c'.\end{cases}$$

其中a'、b'、c'分別與a、b、c相同或相似

推論: 對象 B 可能也具有性質 d'。

可見, 由類比法推得的結論可能眞, 也可能假, 要從邏輯上作進一步論證。這和數學發明創造中的一般途徑相吻合的, 其途徑用框圖給出就是



對於類比, 當今深負衆望的數學教育家、美籍匈牙利的 Polya 在其名著「數學與猜想」中指出: “類比是某種類型的相似性, $\cdots$ 是一種更確定的和更概念性的相似。” Polya 所說的“相似性”, 是指對象在某些方面的一致性, 而類比則就是指可以淸楚定義的一致性, 由此, 按照 Polya 的觀念, 應用類比的關鍵就在於如何把關於對象在某些方面一致性的含糊認識說淸楚。誠如他所說的:“假如你想把它們的相似之處化爲明確的概念, 那麼你就把相似的對象看成是可類比的。假如你成功地把它變成淸楚的概念, 那麼你就闡明了類比關係。” 爲了說淸類比法, 我們不妨舉一個具體的實例:

例3:空間四個任意位置的平面將空間分割成多少部分?

處理方案:

(1) 提出和原題相似的輔助問題“平面上任意三條直線將平面分割成多少部分?”

(2) 分析解答輔助問題

平面上三條兩兩相交但不共點的直線將平面分割成七部分: 一個有限區域 (三角形內部), 其餘都是無限區域, 其中三個與三角形有一公共邊, 另外三個與三角形有一公共點。

(3) 類比推理, 解答原題

空間四個平面若兩兩相交且交線不平行, 四個平面不共點, 則它們將空間分成這樣幾部分: 一個是有限域 (四面體的內部), 其餘都是無限域, 其中有四個與四面體共一面, 另有六個與四面體共一條棱, 還有四個與四面體共一個頂。因此, 空間被分割成 $1+4+6+4=15$ 部分。

4. 類比的種類

應用類比, 需要瞭解類比的幾種常見類型, 茲結合自己的解題及研究實踐, 給出以下幾種:

(1) 降維類比

當解決高維空間中的某些問題時, 往往可以通過與低維空間類似問題的類比推理而獲得解決, 這種類比方法稱爲“降維類比”, 如 [例3]。

(2) 數形類比

通過與 “形” 的比較去推測 “數” 的有關性質, 通過與 “數” 的比較去推測 “形” 的有關性質, 數形的有機結合可從中獲得問題的解決, 這就是所謂的“數形類比”。

例4: 設 A、B、C、D、E、F 6個點依次分布在同1個圓周上, 且 $AB=CD=EF$, $BC=DE=FA$, 點 M、P、Q 分別爲 BC、DE、FA 的中點, 求證: 三角形 MPQ 爲正三角形。

處理方案: 通過類比, 把“形”的問題轉化爲“數”的問題, 使之更易求解。

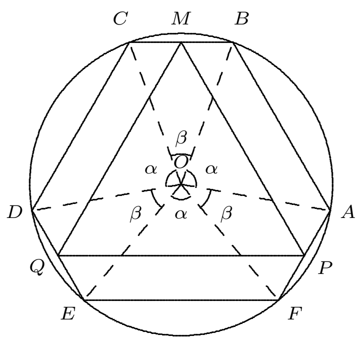


圖 1

把題設的圖形置於複平面內, 不失一般性, 取圓心 O 爲原點, $\angle AOB=\angle COD=\angle EOF=\alpha$, $\angle BOC=\angle DOE=\angle FOA=\beta$ (如圖1), 取圓半徑爲單位長度, 則 A、B、C、D、E、F 對應的複數分別是 1、$e^{i\alpha}$、$e^{i(\alpha+\beta)}$、$e^{i(2\alpha+\beta)}$ 、$e^{i(2\alpha+2\beta)}$、$e^{i(3\alpha+2\beta)}$。M、P、Q 之點對應的複數分別爲 $z_M=\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{i(\alpha+\beta)})$, $z_P=\frac{1}{2}(e^{i(2\alpha+\beta)}+e^{i(2\alpha+2\beta)})$, $z_Q=\frac{1}{2}(e^{i(3\alpha+2\beta)}+1)$, 但 $3\alpha+3\beta=2\pi$, 即 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$, 故 $z_M=\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{i\frac{2\pi}{3}})$, $z_P=\frac{1}{2}(e^{i(\alpha+\frac{2\pi}{3})}+e^{i\frac{4\pi}{3}})$, $z_Q=\frac{1}{2}(e^{i(\alpha+\frac{4\pi}{3})}+1)$, 因爲

$$
\begin{aligned}
z_M\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \frac{1}{2}(e^{i(\alpha+\frac{2\pi}{3})}+e^{i\frac{4\pi}{3}})\\
&= z_P\\
z_P\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \frac{1}{2}(e^{i(\alpha+\frac{4\pi}{3})}+e^{i2\pi})\\
&= \frac{1}{2}(e^{i(\alpha+\frac{4\pi}{3})}+1)\\
&= z_Q
\end{aligned}
$$

所以, 三角形 MPQ 是正三角形。

(3) 轉化類比

通過對有限與無限的類比來達到研究無限性問題的目的的方法稱爲“轉化類比”, 其關鍵在於實現了從有限到無限的轉化。如 [例1]。

(4) 結構類比

由於結構上的極爲相似, 而將待證明題的條件或結論類比已知的公式, 並進行適當的代換, 從而使問題得到解決, 我們把這種類比方法稱爲“結構類比”。

例5:設 x、y、z 均爲實數, 且 $x+y+z=xyz$, 求證: $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

處理方案: 問題的題設條件與結論在結構上都是三數 (式) 之和等於三數 (式) 之積, 類比已知公式: $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$(k爲整數) $\Leftrightarrow tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$, 又結論中每個分式的結構與正切的二倍角公式十分相似, 若作代換 $x=tg\alpha, y=tg\beta, z=tg\gamma$, 則由題設條件得 $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$, 從而 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi, 2\alpha+2\beta+2\gamma=2k\pi=K\pi$(這裏$K=2k$), 於是

$$tg2\alpha+tg2\beta+tg2\gamma=tg2\alpha tg2\beta tg2\gamma$$

即

$$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}+\frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}+\frac{2tg\gamma}{1-tg^2\gamma}=\frac{8tg\alpha tg\beta tg\beta tg\gamma}{(1-tg^2\alpha)(1-tg^2\beta)(1-tg^2\gamma)}$$

亦即

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

(5) 簡化類比

在處理問題時, 有時先求解一道比原題簡單的類比題, 比如多元問題類比少元問題, 高次問題類比低次問題, 普遍問題類比特殊問題等, 以便從中受到啓迪, 進而獲得原題的解題思路與方法。這種類比方法稱爲“簡化類比”。

例6: 以半徑爲 R 的圓 O 的圓周上一點 A 爲圓心, 以 r 爲半徑作圓 A, 圓 A 的切線交圓 O 於 P、Q 兩點, 求證: $AP\cdot AQ$ 爲定值。

處理方案: $AP\cdot AQ$ 的值暫不知道, 但既然 $AP\cdot AQ$ 爲定值, 應當與切點 B 在圓 A 上的位置無關, 故可先將點 B 的位置特殊化, 一方面確定這個定值是什麼, 另一方面也可由 B 在特殊位置時的定値求法去猜測問題的一般解法, 即先解答命題:“以半徑爲 R 的圓 O 的圓周上一點 A 爲圓心 r 爲半徑作圓 O, AO 交圓 A 於 B, 過 B 作圓 A 的切線交圓 O 於 P、Q, 求 $AP\cdot AQ$ 的值。”

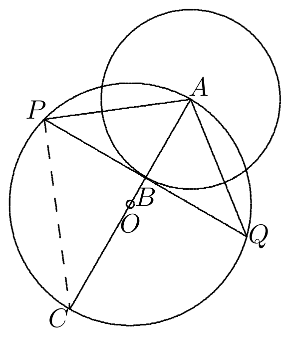


圖 2

由圖2可得以下事實:

因爲 $AP=AQ$, 故 $AP\cdot AQ=$

$AB \cdot AC = r \cdot 2R = 2Rr$ 爲定值。在此基礎上, 我們也得到了本題解法。

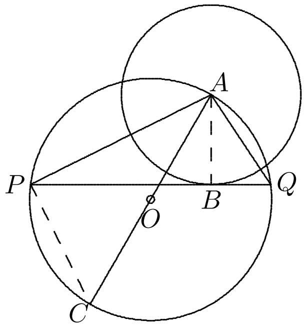


圖 3

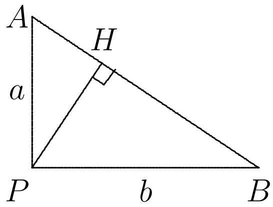
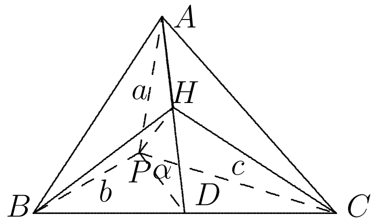
由圖3易證 $\triangle APC \cong \triangle ABQ$, 故 $\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ}$, 從而 $AP \cdot AQ = AB \cdot AC = r \cdot 2R = 2Rr$(定值)。

5. 類比法的作用

關於這一點, Polya 在「數學與猜想」、「怎樣解題」等著作中, 指明了類比方法的各種用途, 歸結起來, 主要有以下三方面:

(1) 類比是提出新問題和獲得新發現的一個重要源泉。

例7.

對象	直角$\triangle APB$, $\angle APB$ 爲直角	四面體$P-ABC$, 三面角$P-ABC$爲直三面角
圖形		
1	$PA^2 = AH \cdot AB$ $PB^2 = BH \cdot BA$	$S^2_{\triangle PBC} = S_{\triangle HBC} \cdot S_{\triangle ABC}, S^2_{\triangle PAB} = S_{\triangle HAB} \cdot S_{\triangle CAB}$ $S^2_{\triangle PCA} = S_{\triangle HCA} \cdot S_{\triangle BCA},$
2	$PA^2 + PB^2 = AB^2$	$S^2_{\triangle PBC} + S^2_{\triangle PCA} + S^2_{\triangle PAB} = S^2_{\triangle ABC}$
3	$\cos A \cdot \cos B \le \frac{1}{2}$	$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \le \frac{1}{9}\sqrt{3}$
4	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$ $(PA = a\ PB = b,\ PH = h)$	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$ $(PA = a\ PB = b,\ PC = c,\ PH = h)$
5	若$PA + PB + AB = m$(定值) 則當 $PA = PB$ 時, $\max(S_{Rt\triangle ABP}) = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2})m^2$	若$(PA+PB+PC)+(AB+BC+CA)=m$(定值) 則當 $PA = PB = PC$ 時, $\max(V_{P-ABC}) = \frac{1}{162}(5\sqrt{2} - 1)m^3$

[例 7]中的表通過平面幾何與立體幾何的類比, 所得到相應的結論使人一目了然, 這是建立在類比基礎上推測的。

(2) 類比在求解問題中也有著廣泛的應用。這就是“選出一個類似的、較易的問題, 去解決它, 改造它的解法, 以便它可以用作一

個模式。然後, 利用剛剛建立的模式, 以達到原來問題的解決。”如 [例6]。

(3) 類比不僅可以被用於發現, 而且也可被用於對猜測進行檢驗。其原則是: 如果有一個與之相類的猜測得到了證明, 原來的猜測也就變得更加可靠。

如 [例1]所知, Euler 利用有限與無限的類比, 求得了 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi}{6}$。由於這一結論是建立在有限與無限的類比之上的, 因此就只是一個大膽的猜想。爲了檢驗這一猜想的可靠性, Euler 又用同樣的方法求得了 Leibniz 級數的和:

考察方程 $1-\sin x=0$, 把它看成是一個“無窮次方程”, 其根爲 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}, \cdots$, 由於這些根都應被看成是重根 (曲線 $y=\sin x$ 在這些橫坐標處並非與 $y=1$ 的直線相交, 而是與它相切), 因此依上述的類比有 $1-\sin x=(1-\frac{2x}{\pi})^2(1+\frac{2x}{3\pi})^2(1-\frac{2x}{5\pi})^2(1+\frac{2x}{7\pi})^2\cdots$, 又已知 $1-\sin x=1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}-\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$, 比較兩式的 x 項之係數, 就有 $-1=-\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3\pi}-\frac{4}{5\pi}+\frac{4}{7\pi}-\cdots$, 即 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$。由於這是一個先前已經知道的結果, 從而, 就如 Euler 所指出的:“這對於我們那個被認爲還有某些不夠可靠之處的方法, 現在可充分予以肯定了, 因此我們對於用同樣方法導出的其它一切結果也不應懷疑。”

6. 類比法的註記

如上所見, 類比法作爲一種極富創造性的方法, 是有無限生命力的。對類比法, 以下幾點必須予於澄淸。

(1) 類比和推廣是有區別的。例如, 從二維的概念到三維的概念, 從二維的判斷到三維的判斷的過渡, 或定理從強充分條件到弱充分條件 (必要條件不變) 過渡, 以弱必要條件到強必要條件 (充分條件不變) 過渡, 都在推廣之列, 而類比的兩大類對象卻大不相同, 類比間的差別大大超過維數、充分條件或必要條件強弱的差別。因此, 要找到類比, 往往需要一定的想像力和創新精神。

(2) 類比所需的想像力, 往往由背景所引發。類比所需的完善性, 也往往以背景爲基礎, 絕不能瞎想硬套。

(3) 類比必須盡量做到完善, 即兩類對象的附屬元素的對應, 大體上要齊全 (不一定一一對應)。並且, 一類的附屬元素間的關係, 大體上要類似於另一類的對應附屬元素間的關係。這樣, 才有可能把一類所作的判斷“嫁接”到另一類, “翻譯”成爲關於另一類的判斷, 並使這種判斷的眞確性增大。

(4) 在進行類比推理時, 應當注意這樣兩條原則:(i) 類比所根據的相似屬性越多, 類比的應用也就越爲有效。這是因爲兩個對象的相似屬性越多, 意味著它們越接近, 這樣去推測其它的屬性相似也就愈加合乎實際。(ii) 類比所根據的相似屬性之間越是相關聯, 類比的應用也就越能成功。因爲類比所根據的許多相似屬性, 如果是偶然的並存, 那麼推論所依據的就不是規律性的東西, 而是表面的聯繫, 結論就不大可靠。如果類比所依據的是現象間規律性的東西, 那麼推得的結論之可靠性程度就較大。

(5) 類比畢竟是類比, 類比決不等於雷同。關於某一類對象的成套定理系, 類比到另

一類對象時, 有些命題的眞假性被破壞, 這是不足爲奇的。

(6) 類比方法並非萬能, 也有其不足之處。不同的研究對象之間存在的相似性是類比法的客觀基礎, 而對象之間的差異性卻限制了類比的範圍和結論的可靠性。在任何兩個相似的事物之間, 總有一定的差異, 不可能一切方面都相似。根據相似屬性進行類比時, 所推論出的屬性如果正好是事物的差異性, 則結論自然是錯誤的。

例如, 任意有限項進行代數和運算是滿足結合律的。但一旦將這一結論類比到無限項的運算中, 則有

$$\begin{aligned} & 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ =& (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ =& 0 \\ & 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ =& 1-(1-1)-(1-1)-\cdots \\ =& 1 \end{aligned}$$

爲什麼會出現這種奇怪的現象呢? 這是因爲用類比法推論出的性質正好是有限與無限的差異性, 這種差異性導致了錯誤的結果。

最後必須指出, 儘管類比法有一定的局限性, 但它仍然是發現數學眞理的一把鑰匙。誠如大哲學家康德所說: “每當理智缺乏可靠論證的思路時, 類比這個方法往往能指引我們前進。” 對類比法, 我們既要大膽地使用它, 但又不能迷信它。

参考文獻

1. 趙振威著,「中學數學與邏輯」, 1992年, 江蘇教育出版社, 242.
2. 鄭毓信著,「數學方法論入門」, 1985年, 浙江教育出版社, 45.
3. 朱成杰編著,「數學靈感何處來」, 1988年, 江蘇科學技術出版社, 22.
4. 魯又文編著,「數學古今談」, 1984年, 天津科學技術出版社, 252-254.
5. G. Polya, Mathematics and Plausible Reasoning, 1954, (中譯本第一卷李心耀等譯), 科學出版社, 1984年, 12-17.
6. 殷堰工編著,「數學概念與解題技巧」, 1989年, 長春出版社.
7. 殷堰工編著,「數學解題策略精編」, 1994年, 上海科技教育出版社.
8. 殷堰工, “模型與解題”,「數學通報」, 1994年, 第6期, 17-21.
9. G. Polya,「怎樣解題」, 1982年, 科學出版社.
10. 同 [5], 第一卷, 21.
11. 同 [3], 24.

—本文作者任教於中國江蘇省蘇州市蘇州教育學院數學系—