三角形内的比例線段(三)

劉俊傑

一. 前言

本文將延續前面兩篇文章的思路, 對比例三角形進行更細部的研討。這次的重點在於對比例三角形所包含的小三角形, 再進行連接各邊等比例點, 以形成新的小三角形的作圖方法, 如圖 A 所示。

如此, 對比例三角形, 更進一步的細部切分, 將爲我們帶來更多意想不到有趣的幾何性質, 如平行線、三點共線、三線共點、線段相等、相似三角形、平行四邊形 ... 等。在討論時我多數以證明三點共線作爲目標, 當然在證明的過程中, 也不時會導引出許多其它重要的幾何性質。而本文推理立論的依據, 完全是由第一篇的37道比例公式 [1], 及第二篇的20道性質 [2]作基礎, 尤其是性質1和性質2, 被引用的次數最多。

由於本文是對比例三角形, 做更詳盡的解析, 自然許多證明的過程, 遠較前兩篇文章來得複雜困難, 往往是在多次引用前面的定理後, 題目才能逐漸地明朗, 這也正可以使我們了解到, 由比例三角形所架構出的推理系統, 是非常地嚴謹和壯觀的。

爲了便於引用和討論, 本文性質的編號, 將接著第二篇文章繼續排下去, 即從第21號性質開始談起。

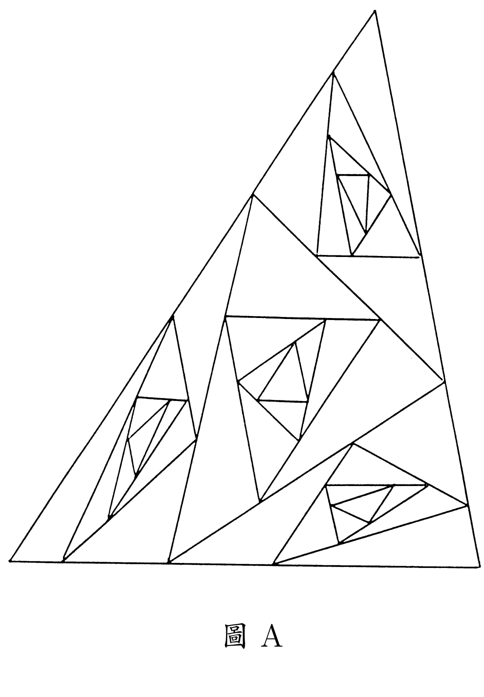

圖 A

二. 本文

性質21: 已知 $1:2\triangle S$ F,G,I 爲所在線段三分點, 求證 F,I,G 共線 (如圖1)。

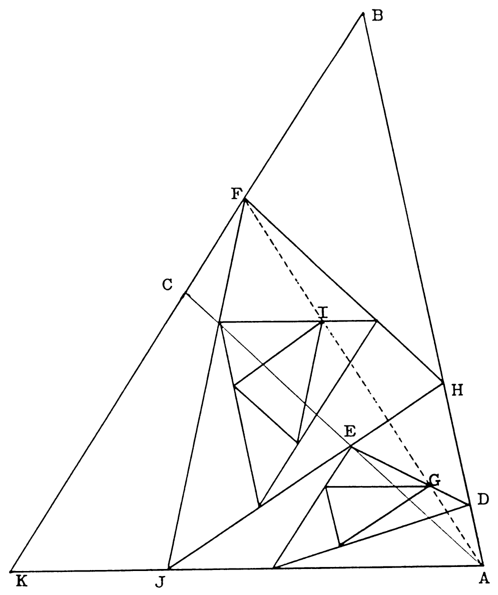

圖 1

證明: 1.引用性質4, 可知 A,F,I 共線, 設 AF 交 ED 於 G' 點, 另由性質7, 有 AE 爲中線, 因此 $BC=CK$, 現將

$$\frac{AH}{HB}=\frac{1}{2},\ \frac{BC}{CK}=1,\ \frac{KJ}{JA}=\frac{1}{2}$$

代入公式 III-(3) 得到, $\frac{AE}{EC}=\frac{4}{5}$。
2. 依據性質5 的過程, 知 $\frac{BF}{FC}=2$, 將 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{8}$, $\frac{BF}{FC}=2$, $\frac{CE}{EA}=\frac{5}{4}$ 代入公式 III-(1), 算出 $\frac{DG'}{G'E}=\frac{1}{2}$。由此可知 $\frac{DG'}{G'E}=\frac{DG}{GE}$, 即 $G'=G$, 因此 G 在 AF 線上, 得證 F,I,G 共線。

性質22: 已知 $1:2\triangle S$, 求證 A,B,C 共線 (如圖2)。

證明: 將 $\frac{DF}{FE}=\frac{1}{2}$, $\frac{FA}{AE}=\frac{1}{2}$ 代入公式 I-(5), 得到 $\frac{DA}{AE}=\frac{5}{4}$ 。延長 $\overrightarrow{CB}$ 交 DE 於 A' 。由性質2, 有 $\frac{DA'}{A'E}=\frac{5}{4}$ 。由此推得 $\frac{DA'}{A'E}=\frac{DA}{AE}\Rightarrow A'=A$, 得證 A,B,C 共線。

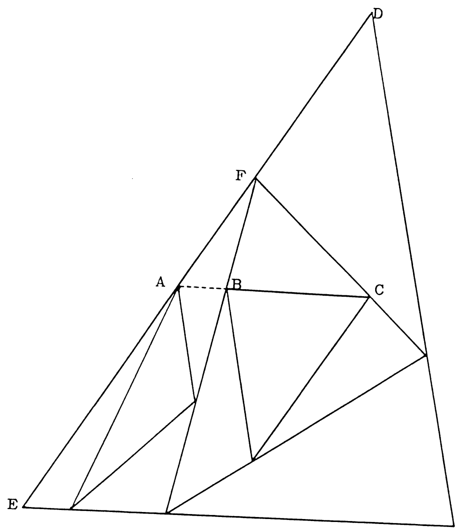

圖 2

性質23: 已知 $1:2\triangle S$, 求證 $DE//FG$ (如圖3)。

證明: 利用性質7可知 DH 是 $\triangle ADI$ 的中線, 因此 $AH=HI$, 將 $AH=HI$, $AI=2IC$ 代入公式 I-(2) 運算得 $HC=2AH$, 再配合已知 $DB=2AD\Rightarrow DH//BC$。由性質1, 有 $FG//BC$, 得證 $DE//FG$。

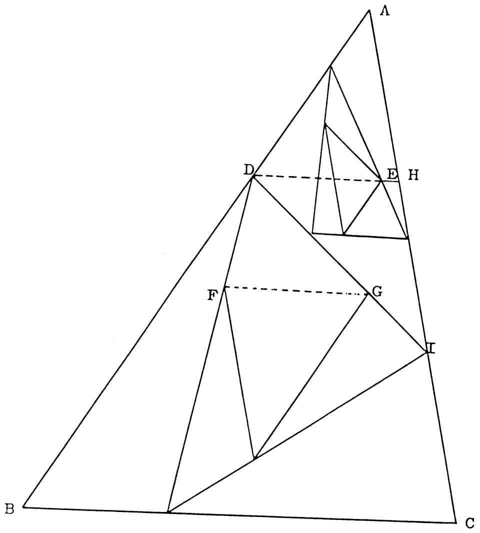

圖 3

性質24: 已知 $1:2\triangle S$, 求證 H,F,G 共線 (如圖4)。

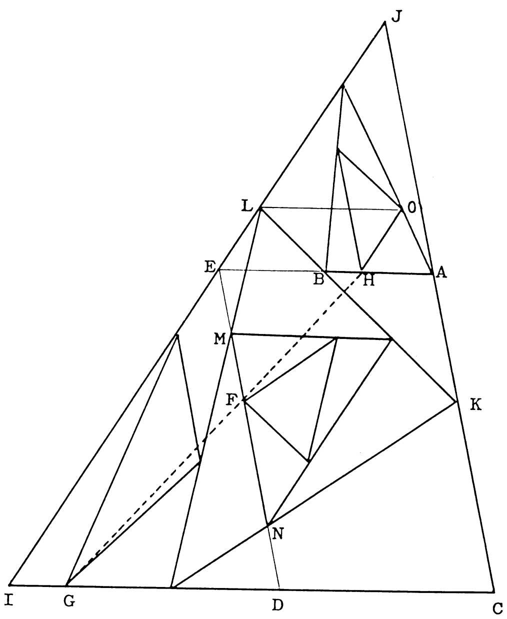

圖 4

證明: 本題因性質天成, 證明推理過程略爲複雜, 主要在導出 $EH//GD$, 使 $\triangle EFH \sim \triangle DFG$, 以得出 HG 通過 MN 的三分點。

1. 將 $KJ=2CK$, $AJ=2KA$ 代入公式 I-(5) $\Rightarrow$ $\frac{JA}{AC}=\frac{4}{5}$ 。延長 $\overrightarrow{NM}$ 交 JI 於點 E。由性質2, 得 $\frac{JE}{EI}=\frac{4}{5}$, 依據性質23, 知 $LO//IC$, 再從性質5, 知 $AB//LO$, 因此得到 $AB//IC$, 綜合以上得有 $\overrightarrow{AB}$ 延長線恰過 E 點 $AE//CD$。再運用性質1, 得 $ED//AC$, 因此 $AEDC$ 是平行四邊形, 所以 $CD=AE=\frac{4}{9}CI$。
2. 由前推論有 $\frac{JE}{EI}=\frac{4}{5}\Rightarrow JI=9EL\Rightarrow JL=3EL$ 配合 $JK=3AK$ 代入公式 II-(1) 計算出 $AB=BE$, $AH=\frac{2}{3}AB=\frac{1}{3}AE$, $EH=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}CI=\frac{8}{27}CI$。另外 $IG=\frac{1}{9}CI$, $CD=\frac{4}{9}CI$, 因此 $GD=\frac{4}{9}CI$ 。綜合上述結果, 得 $\frac{EH}{GD}=\frac{2}{3}$。
3. 設 HG 交 ED 於 F', 由於 $EH//GD$ $\Rightarrow$ $\frac{EF'}{F'D}=\frac{2}{3}$, 根據性質2的推理過程, $EM=ND=\frac{1}{5}ED$, 因此 $MF'=\frac{1}{5}ED$, $F'N=\frac{2}{5}ED$ 。最後 $\frac{MF'}{F'N}=\frac{1}{2}$, F' 是 MN 的三分點 。得證 H,F,G 共線。

性質25: 已知 $1:2\triangle S$, D,F 爲所在線段三分點 E 爲 AC,NO 的交點。求證 D,E,F 共線 (如圖5)。

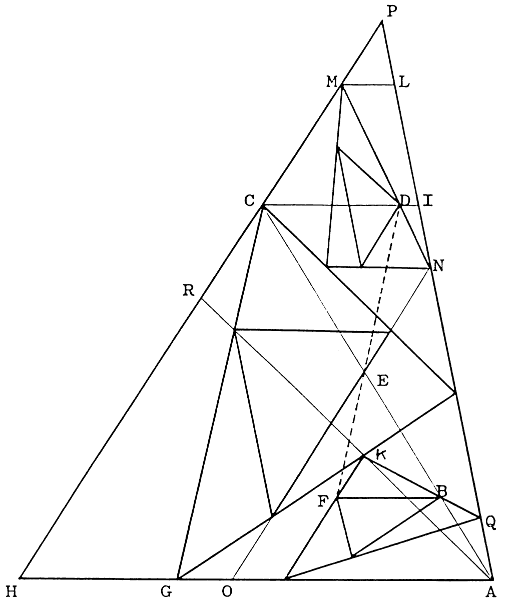

圖 5

證明:

1. 依據性質21得 A, B, C 共線。設 DF 交 AC 於 E' 點, 從性質1, 知 $BF//AG$, 且 $BF=\frac{1}{3}AG=\frac{2}{9}AH$ 。由性質23, 有 $CI//AH \Rightarrow CI=\frac{1}{3}AH$。作 $ML//CI \Rightarrow ID=\frac{1}{3}LM=\frac{1}{27}AH$, 因此 $CD=\frac{8}{27}AH$ 。綜合以上推理, 得到 $\frac{BF}{CD}=\frac{3}{4}$。因為 $CI//AH, BF//AH$, 所以 $CI//BF$, 得到 $\frac{BE'}{E'C}=\frac{3}{4}$。
2. 在性質21的證明過程中, 有 $QP=8AQ$, $PC=2CR$, $4RK=5KA$ 代入公式 III-(3), 算出 $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{7}$ 配合1. 的結果, 再代入公式 I-(5) 得 $\frac{AE'}{E'C}=\frac{5}{4}$。根據性質1及性質2, 有 $\frac{AE}{EC}=\frac{5}{4}$, 至此 $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$, $E'=E$, 得證 D, E, F 共線。

性質26: 已知 $1:2\triangle S$, K, L, F, H 為所在線段三分點。求證 K, L, F, H 共線 (如圖6)。

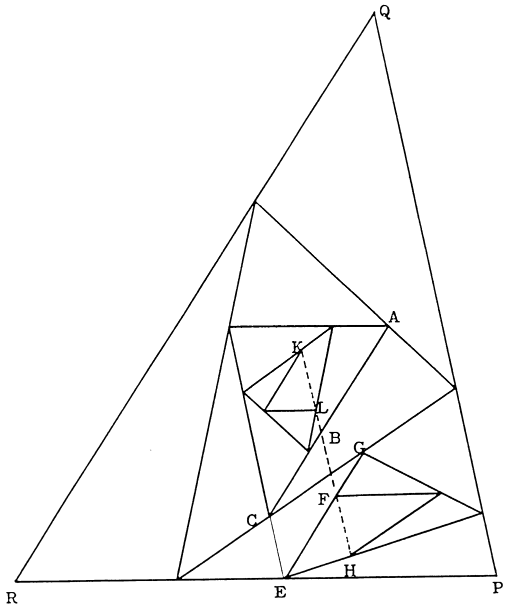

圖 6

證明:

1. 令 $\overrightarrow{KB}$ 延線交 EG 於 F' 。因性質1, 知 $BF'//CE$ 。自性質24, 證明過程1, 可得 $BC//EF'$ 。至此 $BCEF'$ 為平行四邊形, 所以 $EF'=BC=\frac{4}{9}AC$ (性質2)。
2. 再由性質24的證明過程有 $EG=\frac{2}{9}QR$, 配合性質2的 $AC=\frac{1}{3}QR$, 得到 $EG=\frac{2}{3}AC$ 。綜合1, 2 的推理 $\frac{EF'}{EG}=\frac{2}{3}=\frac{EF}{EG}$, 得證 K, L, F 共線。
3. 從性質3, 可知 $KF//QP$, 再從性質1可得 $FH//QP$, 得證 K, L, F, H 四點共線。

註: 這個性質渾然天成, 令人印象深刻。

性質27: 已知 $1:2\triangle S$, A, D, F 為所在線段的三分點。求證 A, D, F, G 共線 (如圖7)。

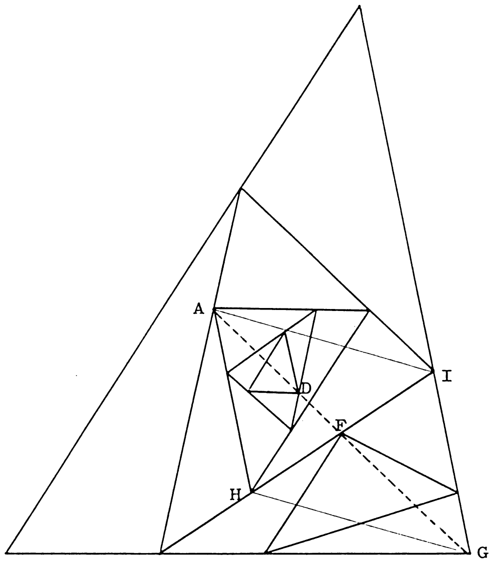

圖 7

證明: 連接 AG, 交 KI 於 F' 應用性質12。可知 $AHGI$ 爲平行四邊形, 由此 $HF' = F'I$, 得到 F' 爲三分點。所以 A, F, G 共線, 參考性質9的證明結果, 即知 A, D, G 共線。綜合上述推論 , 得證 A, D, F, G 共線。

性質28: 已知 $1:2\triangle S$, B, E, S 爲所在線段三分點。求證 B, E, S 共線 (如圖8)。

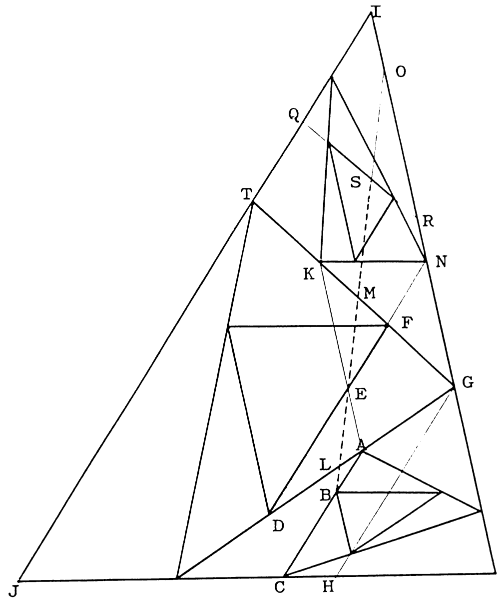

圖 8

證明: 本題的三個共線點, 距離較遠, 證明過程略爲複雜。基本方法是從 B 向 E 引出直線, 交 TG 於 M, QR 於 S', IG 於 O, 求出各相關比例值再應用線基定理公式, 證明 S' 爲三分點, 即得證。

1. 先由性質26推理過程2, 有 $AC = \frac{2}{9}IJ$, 再由性質2, 知 $FD = \frac{1}{3}IJ$, 因此 $ED = \frac{2}{9}IJ = AC \Rightarrow ED = 3AB$ 。從性質24推理過程1, 知 $AB//ED$, 因此 $\triangle ALB \sim \triangle DLE$, 得 $\frac{AL}{LD} = \frac{AB}{ED} = \frac{1}{3}$, 配合 $AG = AD \Rightarrow \frac{LD}{LG} = \frac{3}{5}$, 根據 Menelaus 定理
$$\frac{FE}{ED}\frac{LD}{LG}\frac{GM}{MF} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{GM}{MF} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{GM}{MF} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{MF}{FG} = \frac{3}{7}$$
將 $KF = FG$, $\frac{MF}{FG} = \frac{3}{7}$ 代入公式 I-(6) 運算出 $\frac{KM}{MG} = \frac{2}{5}$, 將 $KG = 2TK$, $5KM = 2MG$, 代入公式 I-(5), 得 $\frac{TM}{MG} = \frac{11}{10}$。

2. 在性質2的證明過程, 有 $DE=EN$, 再應用 Menelaus 定理

$$\frac{ED}{NE}\frac{LG}{DL}\frac{ON}{GO}=1\Rightarrow\frac{1}{1}\frac{5}{3}\frac{ON}{GO}=1$$
$$\Rightarrow\frac{ON}{GO}=\frac{3}{5}$$

將 $\frac{IN}{NG}=\frac{2}{1}$, $\frac{ON}{NG}=\frac{3}{2}$ 代入公式 I-(6), 算得 $\frac{IO}{OG}=\frac{1}{5}$。

3. 令 $\overrightarrow{BE}$ 交 QR 於 S' , 將 $\frac{IQ}{QT}=\frac{5}{4}$, $\frac{TM}{MG}=\frac{11}{10}$, $\frac{GR}{RI}=\frac{4}{5}$, $\frac{GO}{OI}=\frac{5}{1}$, 套入公式 V-(4), 計算出 $\frac{QS'}{S'R}=\frac{3}{2}$, 根據性質2的證明過程 $\frac{QS}{SR}=\frac{3}{2}$ 。至此 $S'=S$, 得證 B,E,S 共線。

性質29: 已知 $1:2\triangle S$, G,E 爲所在線段三分點, O 是 AC 和 $\overrightarrow{LH}$ 延線的交點。求證 G,O,E 共線 (如圖9)。

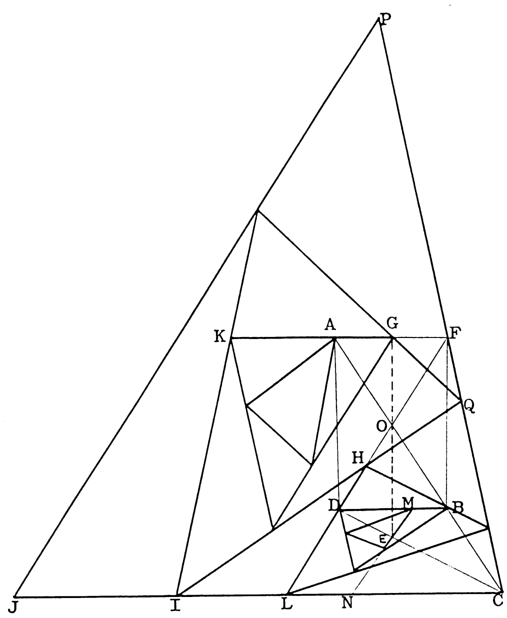

圖 9

證明:

1. 首先, 延長 $\overrightarrow{KG}$ 交 PC 於 F, 利用性質2知, $\frac{PF}{FC}=\frac{5}{4}$ 。設 $verrightarrowLH$ 交於 PC 於 F', 根據 Menelaus 定理

$$\frac{HI}{QH}\frac{LC}{IL}\frac{F'Q}{CF'}=1\Rightarrow\frac{F'Q}{QC}=\frac{1}{3}$$

配合 $\frac{PQ}{QC}=\frac{2}{1}$, 代入公式 I-(6) 得 $\frac{PF'}{F'C}=\frac{5}{4}$, 因此 $F'=F$, 即 L,H,F 共線。

2. 由性質21 得 A,B,C 共線。從性質7, 知 D,E,C 共線在性質2, 有 $BD=\frac{1}{3}IC=\frac{2}{9}JC$ 。從性質2的證明過程, 可知 $AF=\frac{2}{9}JC=BD$, 利用性質1, $KG//JC$ 且 $BD//JC\Rightarrow AF//BD$。綜合可知 $ADBF$ 爲平行四邊形, 因 O 爲 $ADBF$ 對角線的交點, 得 $AO=OB$。引用性質2的推演過程, 可知 $AG=GF$, 因此 $OG//AD//FB$。

3. 已知 $AF=\frac{2}{9}JC$, $LC=\frac{4}{9}JC\Rightarrow\frac{AF}{LC}=\frac{1}{2}$, 又因 $AF//LC$, 可得 $\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$, 再延長 $\overrightarrow{ME}$ 交 IC 於 N, 又由性質1,

$$DM//LN,MN//LD$$
$$\Rightarrow MNLD\text{平行四邊形}$$
$$\Rightarrow DM=LN=\frac{2}{9}IC$$
$$\Rightarrow\frac{LN}{NC}=\frac{1}{2},\ \text{配合 } MN//LD$$
$$\Rightarrow\frac{CE}{ED}=\frac{2}{1}。$$

因爲 $\frac{CE}{ED}=\frac{2}{1}=\frac{CO}{OA}\Rightarrow OE//AD$, 配合2的結論 $OG//AD$, 由於過線外一點平行線, 只有一條, 得證 G,O,E 共線。

性質30: 已知 $1:2\triangle S$, A,B,C 是所在線段三分點。求證 A,B,C 共線 (如圖10)。

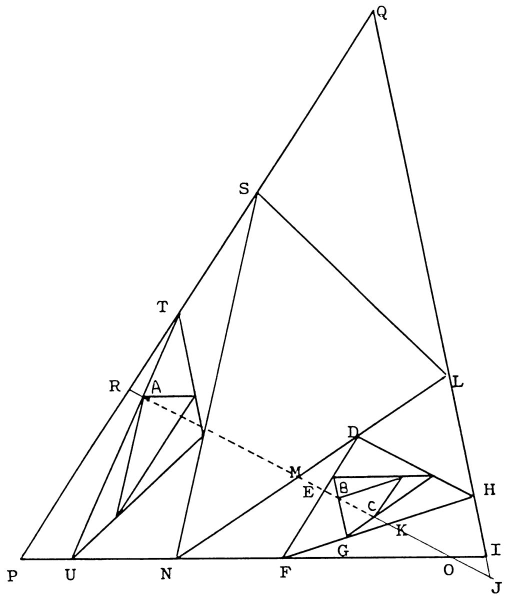

圖 10

證明:

1. 由性質2, 可知 $\frac{FK}{KH}=\frac{5}{4}$, 配合 $GH=2FG$, 代入公式 I-(4), 有 $\frac{GK}{KH}=\frac{1}{2}$ 依據性質1, $BG//HJ$, 因此 $HJ=2BG$, 又從 $BG=\frac{2}{9}LI$, 所以 $HJ=\frac{4}{9}LI$, 已知 $LH=\frac{6}{9}LI\Rightarrow\frac{HL}{JH}=\frac{3}{2}$。再次利用性質1, $DH//MJ\Rightarrow\frac{LD}{DM}=\frac{3}{2}$, 配合 $\frac{LD}{DN}=\frac{1}{2}$ 代入公式 I-(1), 算出 $\frac{LM}{MN}=\frac{5}{4}$ 。
2. 由前 $HJ=\frac{4}{9}LI$, 而 $HI=\frac{3}{9}LI$, 因此 $IJ=\frac{1}{9}LI$ 。應用 Menelaus 定理

$$\begin{aligned}\frac{ON}{IO}\frac{ML}{MN}\frac{IJ}{LJ}=1\Rightarrow&\frac{ON}{IO}\frac{5}{4}\frac{1}{10}=1\\ \Rightarrow&ON=8IO\\ \Rightarrow&IO=\frac{2}{27}IP。\end{aligned}$$

綜合以上結果, 有

$$\frac{IL}{LQ}=\frac{1}{2},\quad\frac{PN}{NI}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{PO}{OI}=\frac{25}{2},\quad\frac{LM}{MN}=\frac{5}{4},$$

代入公式 V-(5), 計算出 $\frac{QR}{RP}=\frac{56}{25}$, 得 $QR=\frac{56}{81}PQ$, 而

$$QS=\frac{27}{81}PQ\Rightarrow RS=\frac{29}{81}PQ。$$

由於

$$\begin{aligned}TR=RS-TS=&\frac{29}{81}PQ-\frac{18}{81}PQ\\ =&\frac{11}{81}PQ。\end{aligned}$$

配合

$$PR=\frac{25}{81}PQ\Rightarrow\frac{TR}{RP}=\frac{11}{25}。$$

3. 由2的過程中有 $\frac{PO}{OI}=\frac{25}{2}$ 配合 $\frac{PU}{UI}=\frac{1}{8}$。代入公式 I-(4), 算得 $\frac{PU}{UO}=\frac{3}{22}$, 令$\overrightarrow{CB}$交 TU 於 A', 依據 Menelaus 定理

$$\begin{aligned}&\frac{A'T}{A'U}\frac{RP}{TR}\frac{OU}{PO}=1\\ \Rightarrow&\frac{A'T}{A'U}\frac{25}{11}\frac{22}{25}=1\\ \Rightarrow&\frac{A'T}{A'U}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

至此, 即 $\frac{A'T}{A'U}=\frac{AT}{AU}$ 即 $A'=A$, 得證 A,B,C 共線。

性質31: 已知 $1:2\triangle S$, A,B 爲所在線段三分點。求證 A,B,C 共線 (如圖11)。

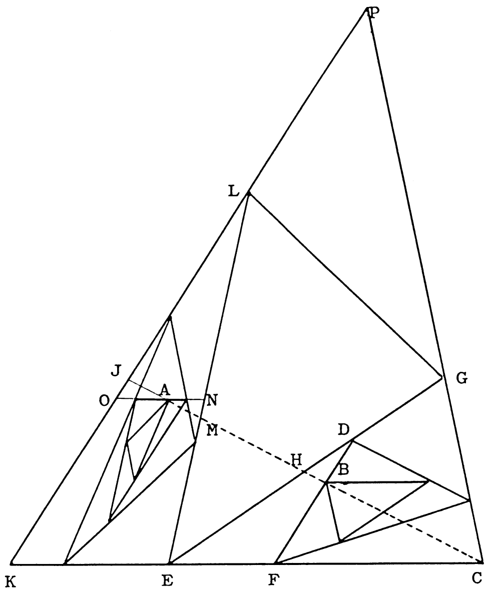

圖 11

證明:

1. 利用 Menelaus 定理, 知

$$\frac{BD}{FB}\frac{HE}{DH}\frac{CF}{EC}=1$$

得 $HE=3DH$, 將 $DE=2GD$, $HE=3DH$ 套入公式 I-(5) $\Rightarrow HG=HE$, 再將

$$\frac{CG}{GP}=\frac{1}{2},\ \frac{KE}{EC}=\frac{1}{2},\ \frac{GH}{HE}=\frac{1}{1}$$

代入公式 III-(2), 得 $PJ=2JK$。

2. 又根據 Menelaus 定理

$$\frac{ML}{EM}\frac{JK}{LJ}\frac{CE}{KC}=1\Rightarrow\frac{ML}{EM}=\frac{3}{2}$$

引用性質2., 知

$$\frac{LO}{OK}=\frac{LN}{NE}=\frac{5}{4}$$

延長 $\overrightarrow{CB}$ 交 ON 於 A' 點, 將以上結果

$$\frac{LJ}{JK}=\frac{1}{1},\quad\frac{LO}{OK}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{EM}{ML}=\frac{2}{3},\quad\frac{EN}{NL}=\frac{4}{5}$$

放進公式 IV-(1), 計算出 $\frac{OA'}{A'N}=\frac{3}{2}$。依據性質2的過程, 有 $\frac{OA}{AN}=\frac{3}{2}$, 至此 $A'=A$, 得證 A,B,C 共線。

性質32: 已知 $1:2\triangle S$, A,B,C,T 爲所在線段三分點。求證 $AC,\overrightarrow{DB},OT$ 三線共點 (如圖12)。

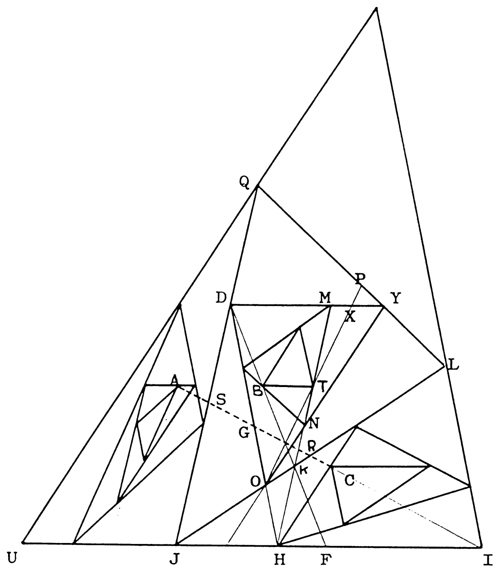

圖 12

證明: 這個題目, 看到圖形, 就可以想見證明的難度。主要推論的主軸, 是推理出 AC 和 OT 過 DF 線段上的同一比例點, 結論出三線共點的性質。

1. 根據性質31, 知 A,C,I 共線, 再從性質31的過程, 有

$$\frac{JO}{OL}=\frac{1}{2},\quad\frac{JR}{RL}=\frac{1}{1},$$

$$\frac{QD}{DJ}=\frac{1}{2},\quad\frac{QS}{SJ}=\frac{3}{2}$$

代入公式 IV-(1), 承算出 $GD=2GO$, 再配合性質2的過程, 得 $GD=GH$。

2. 現在證明 M, N, H 共線依性質2, 有 $DM=\frac{2}{9}UI$, 令 $\overrightarrow{MN}$ 交 UI 於 H', 由性質1, 可知 $DMH'J$ 爲平行四邊形, 因此 $JH'=\frac{2}{9}UI=JH$, 所以, M, N, H 共線。
3. 引性質2知 $\frac{JK}{KL}=\frac{4}{5}$, 配合 $LO=2OJ$ 代入公式 I-(4), 運算出 $JO=3OK$。在性質1, 有 $KH//DJ$, 因此

$$\begin{aligned}
& DJ=3KH \\
\Rightarrow\ & JF=3HF(KH//DJ) \\
\Rightarrow\ & JH=2HF \text{ 配合 } HI=2JH \\
& \text{代入公式I-(1)} \\
\Rightarrow\ & FI=3HF
\end{aligned}$$

設 AC 交 DF 於 E' 點, 應用 Menelaus 定理

$$\frac{E'D}{FE'}\frac{GH}{DG}\frac{FI}{HI}=1\Rightarrow\frac{E'D}{FE'}=\frac{4}{3}$$

4. 綜合性質1和性質2, 可得 $\frac{DX}{XY}=4$, 將

$$\frac{QD}{DJ}=\frac{1}{2},\quad \frac{JO}{OL}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{LY}{YQ}=\frac{1}{2},\quad \frac{DX}{XY}=\frac{4}{1}$$

代入公式 V-(6), 運算得 $\frac{LP}{PQ}=\frac{4}{5}$, 再令 OT 交 DF 於 E 點, 將

$$\frac{LP}{PQ}=\frac{4}{5},\quad \frac{QD}{DJ}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{JO}{OL}=\frac{1}{2},\quad \frac{JK}{KL}=\frac{4}{5}$$

輸入公式 V-(1), 運算出 $DE=6EK$, 依 Menelaus 定理

$$\begin{aligned}\frac{OD}{OH}\frac{KF}{DK}\frac{JH}{JF}=1&\Rightarrow\frac{3}{1}\frac{KF}{DK}\frac{2}{3}=1\\ &\Rightarrow DK=2KF\end{aligned}$$

最後將 $\frac{DE}{EK}=\frac{6}{1}$, $\frac{DK}{KF}=\frac{2}{1}$ 代入公式 I-(2), 有 $\frac{DE}{EF}=\frac{4}{3}$, 至此 $\frac{E'D}{FE'}=\frac{ED}{FE}$, 即 $E'=E$, 表示 AC 和 OT 過 DF 線段上的同一比例點, 得證 AC, $\overrightarrow{DB}$ 和 OT 三線共點。

性質33: 已知 $1:2\triangle S$, $AB=2BF$, $IE=2ED$, BE 過 G, M, N, J, Y, X 等點。求證 G, M, N, J, Y, X 均爲所在線段三分點 (即八個三分點共線)(如圖13)。

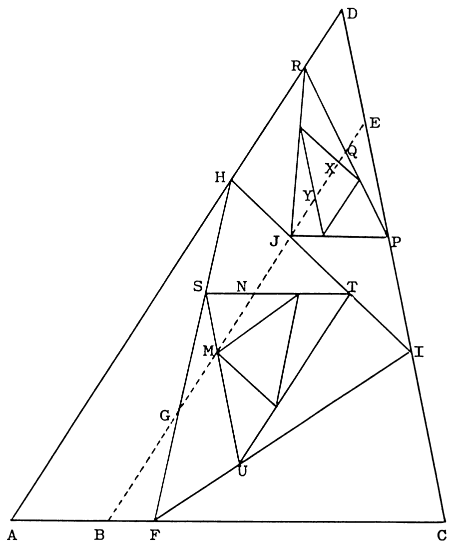

圖 13

證明:

1. 由已知條件, 容易推出

$$\frac{CB}{BA}=\frac{CE}{ED}=\frac{7}{2}\Rightarrow BE//AD$$

因此 $\frac{FG}{GH}=\frac{FB}{BA}=\frac{1}{2}$, 所以 G 爲三分點, 同理可證 J 亦爲三分點。

2. 應用 Menelaus 定理,

$$\frac{NT}{SN}\frac{JH}{TJ}\frac{GS}{HG}=1\ \Rightarrow\ NT=2SN$$

故 N 是三分點, 再將

$$\frac{FU}{UI}=\frac{1}{2},\quad \frac{IJ}{JH}=\frac{2}{1},$$
$$\frac{HS}{SF}=\frac{1}{2},\quad \frac{HG}{GF}=\frac{2}{1},$$

代入公式 V-(4), 計算出 $UM=2MS$, M 爲三分點。

3. 因爲 $EJ//DH$ 且 $PE=ED\Rightarrow PQ=QR$ 再依性質 7, 即可知 X,Y 爲三分點, 證畢。

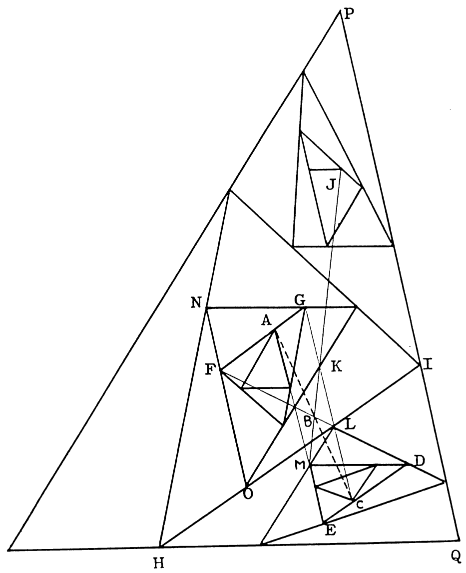

圖 14

性質 34: 已知 $1:2\triangle S$, A,C 爲所在線段三分點 B 是 FL 和 JM 的交點。求證 A,B,C 共線 (如圖 14)。

證明:

1. 首先, 由性質 1 可知

$$DE//HI//FG$$

從性質 2 的證明過程

$$DC=\frac{2}{9}HI=FA$$

因此 $FADC$ 是平行四邊形, 令 FL 交 AC 於 $B'\Rightarrow AB'=B'C$ (對角線的交點)。

2. 據性質 28, 有 K 爲三分點, 從性質 26, 知 A,M,E 共線, 再由性質 33, 得 G,K,L,C 共線, 綜合性質 5 和性質 7 $\Rightarrow LC//ME$ 即 $AM//KC$ 又配合前述 $AG//EC$, 得到 $AGCE$ 是平行四邊形 $\Rightarrow AE=GC$。

3. $GK=\frac{1}{3}NO=\frac{1}{9}PQ=ME$, 配合 2 的結果 $\Rightarrow AM=KC\Rightarrow AMCK$ 爲平行四邊形, 設 MK 交 AC 於 $B''\Rightarrow AB''=B''C$。綜合 1,3 知 FL 和 JM 均通過 AC 的中點, 所以 FL 和 JM 的交點 B, 落在 AC 線上, 得證 A,B,C 共線。

性質 35: 已知 $1:2\triangle S$, B 爲 $\overrightarrow{ED},FG$ 的交點。求證 A,B,C 共線 (如圖 15)。

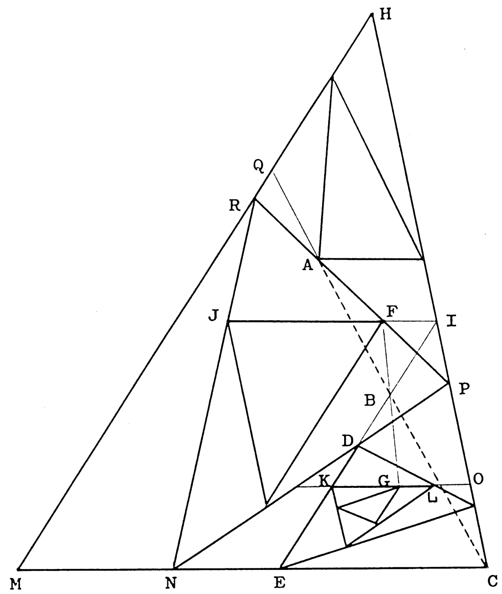

圖 15

證明:

1. 先作 $\overrightarrow{ED}$ 交 CH 於 I, 再由性質24的證明過程1, 可知 JFI 共線。引用性質1, 得到 $JI//KL$ 依性質2可有

$$FI=\frac{1}{9}MC$$
$$KG=\frac{2}{9}NC=\frac{4}{27}MC$$
$$\Rightarrow\frac{FI}{KG}=\frac{3}{4}$$

已有 $FI//KG\Rightarrow\frac{IB}{BK}=\frac{3}{4}$。

2. 從性質24的證明過程2, 可得 $\frac{IP}{pc}=\frac{1}{3}$, 配合 $\frac{PO}{OC}=\frac{5}{4}$, 套入公式 I-(5), 運算出 $IO=2OC$。因爲 $KO//EC$ (性質1), 所以 $IK=2KE$ 。配合前面 $4IB=3BK$, 再代入公式 I-(2), 可得 $\frac{BI}{BE}=\frac{2}{5}$。

3. 將 $\frac{CP}{PH}=\frac{1}{2}$, $\frac{RA}{AP}=\frac{1}{2}$ 輸入公式 II-(2), 算出 $HQ=6QR$ 再配合 $RM=2HR$, 代入公式 I-(2), 求出 $\frac{HQ}{QM}=\frac{2}{5}$, 令 AC 交 IE 於 B', 性質24的過程1告訴我們 $IE//HM$

$$\Rightarrow\frac{IB'}{B'E}=\frac{HQ}{QM}=\frac{2}{5}=\frac{IB}{BE}$$

故 $B'=B$, 得證 A,B,C 共線。

性質36: 已知 $1:2\triangle S$, EK 交 FG 於點 B。求證 A,B,C 共線 (如圖16)。

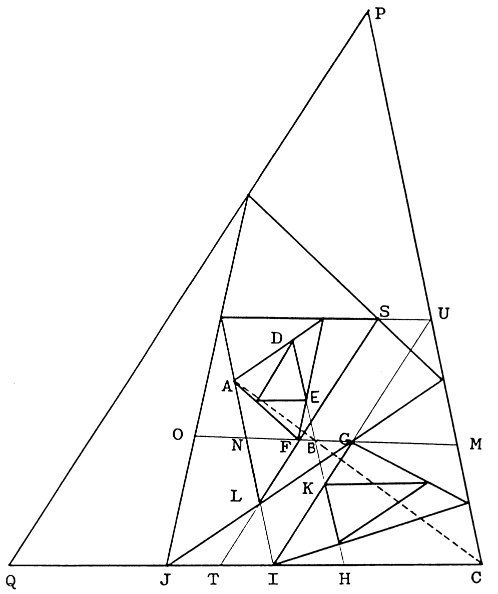

圖 16

證明:

1. 設 EK 交 AC 於 B' , 依據性質26, 知道 DE, KH 共線再由性質22, 知 ALI 共線。因性質2, 有

$$\frac{JH}{HC}=\frac{5}{4}\text{ 配合 }\frac{JI}{IC}=\frac{1}{2}$$

代入公式 I-(4) 得 $HC=2IH$, 再因性質1, 可有 $KH//AI$ 所以 $\frac{AB'}{B'C}=\frac{1}{2}$。

2. 再次利用性質1知 $SU//TI$, 性質24, 有 $IU//ST$, 綜合得 $SUIT$ 是平行四邊形, 再由性質24的過程中, 有 $UG=GI$, 配合性質2過程中的 $SF=FT$, 得知 $FGIT$ 平行四邊形 $\Rightarrow NM//IC$, 至此可知 N 爲三分點, 即 $AN=\frac{1}{9}PC$ (性質2), 而 $MC=\frac{2}{9}PC$, 所以 $MC=2AN$。令 FG 交 AC 於 B'', 由以上結果, 可有 $B''C=2AB''$, 配合1的結果, 可知 $B'=B''$, 因此 EK 和 FG 通過 AC 上的同一點, 得證 A,B,C 共線。

性質37: 已知 $1:2\triangle S$, A, C 爲所在線段三分點, $\overrightarrow{JT}$ 交 IL 於 G, FG 交 DE 於 B。求證 A, B, C 共線 (如圖17)。

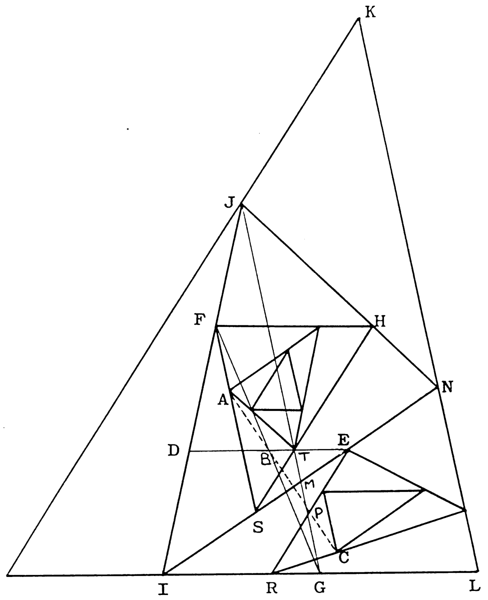

圖 17

證明:

1. 在性質36的證明過程中, 可知 $DE//IG$ 且 $FD = DI \Rightarrow FB = BG$。
2. 綜合性質7和性質8, 得到 $IG = GL$ 且 $IM = MN$, 將 $RL = 2IR, IG = GL$, 代入公式 I-(4) $\Rightarrow IR = 2RG$, 再將 $IE = 2EN$, $IM = MN$, 套入公式 I-(4) $\Rightarrow IM = 3ME$。根據 Menelaus 定理

$$\frac{PG}{MP}\frac{RI}{GR}\frac{EM}{IE} = 1 \Rightarrow PG = 2MP。$$

因爲

$$MG = \frac{1}{2}NL \Rightarrow PG = \frac{1}{3}NL$$

由性質12, 有 $FA = \frac{1}{3}NL$, 所以 $PG = FA$, 綜合性質5和性質7, 得 $PG//FA$, 至此可知 $FAGP$ 是平行四邊形, 因此 AP 過 FG 的中點 B, 得證 A, B, C 共線。

三. 結語

介紹了有關比例三角形的卅七道幾何性質, 相信大家對比例三角形所架構出的推理體系及巧妙精準的幾何圖形, 一定有了深刻的印象。也可以淸楚地見到, 第一篇的37個比例公式, 對我們求比例値的幫助甚大。更可以想像, 比例三角形所能發展的幾何性質, 不只這37個。事實上, 我找到推證出的題目, 共有268個, 現在把它們全部集中描繪在圖 B 和圖 C, 供各位參考, 圖中的虛線表示已得證的直線。希望以後能有機會, 繼續向各位介紹它們的證明過程。

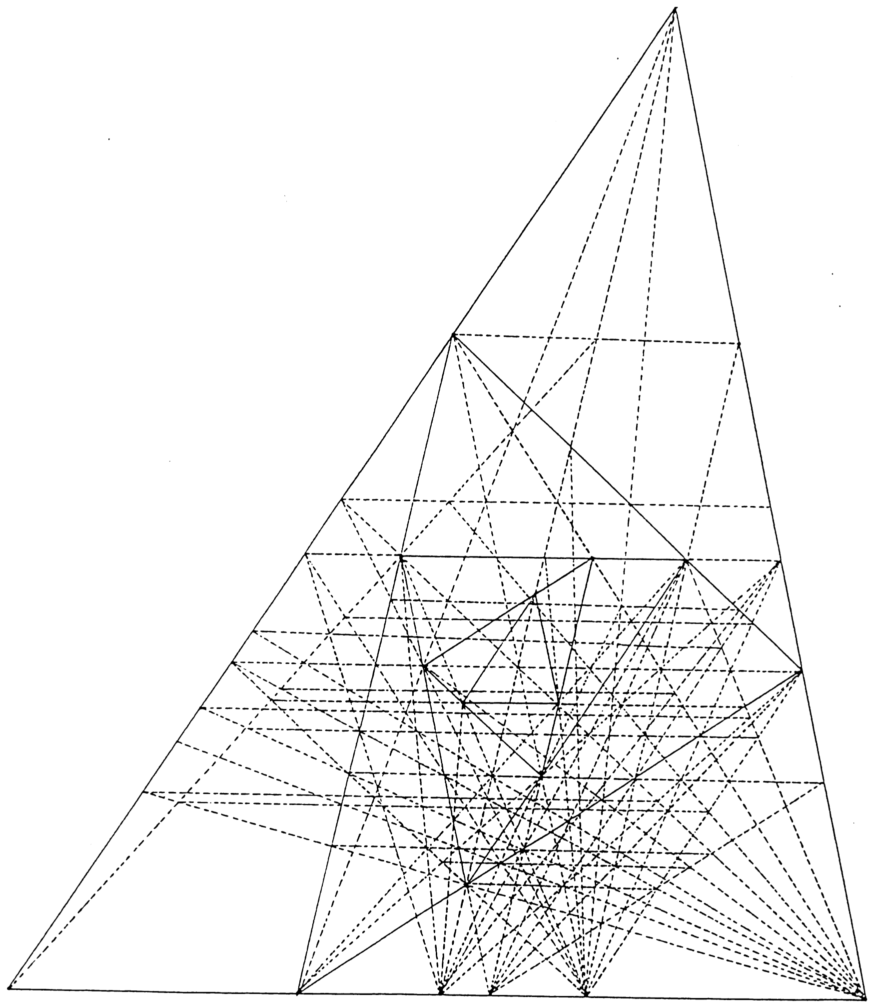

圖 B

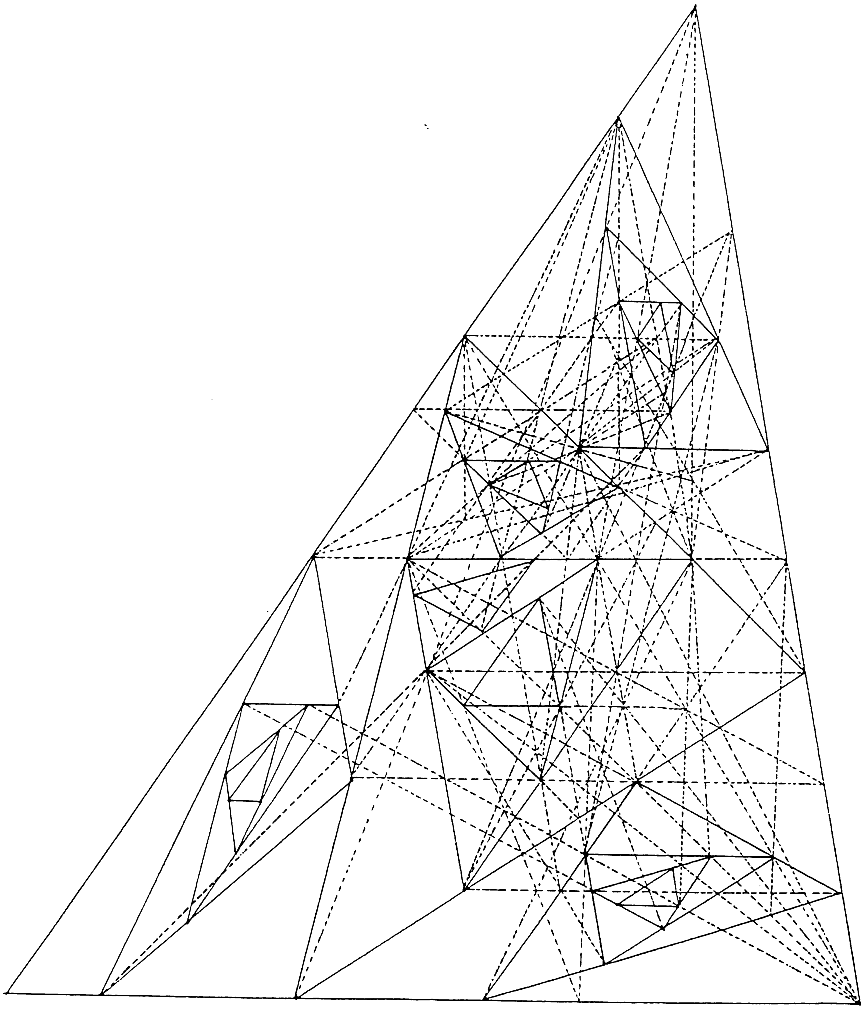

圖 C

參考資料:

1. 劉俊傑, 三角形內的比例線段 (一), 數學傳播季刊, 第十九卷第二期,84年6月。p.76-85。
2. 劉俊傑, 三角形內的比例線段 (二), 數學傳播季刊, 第二十卷第三期, 85年9月,p.60-68。
3. 孫文先, 平面幾何, 九章出版社,1986。
4. Howard Eves, “A Survey of Geometry”, Vol. 1。Boston, Allyn and Bac. , 1963-65.
5. Roger A. Johnson, “Advanced Euclidean Geometry”, Dover publications, INC. 1960.

—本文作者任教於省立西螺農工—