本文摘譯自倫敦數學學會集刊
第14卷第5集, 1982年, 418-436。原文著者為海曼教授 W.K.Hayman。

羅爾夫 · 內伐里納

(Rolf Nevanlinna)1895-1980

楊重駿

1. 背景

羅爾夫 · 內伐里納 (Rolf Nevanlinna) 出生於1895年10月22日, 逝世於1980年5月28日。他來自一個講瑞典話的芬蘭家庭 — 其世代有軍人、科學家及工程師。他的姓原是尼渥維武斯 (Neovius), 是他父親於1906年改姓爲里伐內納的。

羅爾夫母系的祖父, 赫曼·龍伯格 (Herman Rombeig), 爲一天文學家, 他在瀑科伐 (Pulkova) 觀察台記錄星誌。

羅爾夫的父親, 奧圖·魏爾海爾門 (Otto Willhelm) 生於1867年, 他先進入軍校, 然後到赫爾新基 (Helsinki) 大學攻讀數學, 物理及天文學。他的博士論文是有關氧、氮等氣體的光譜線, 他的有些研究結果, 隱示存在有某種稀有的氣體, 基於此, 暖塞 (Ramsay) 於1904年得到了諾貝爾獎。奧圖 · 魏爾海爾門在河曼 · 龍伯格 (Herman Rombera) 門下學習時, 結識了馬格麗特 · 龍伯格, 倆人於1892年結婚, 並在約漢書 (Joensuu) 定居了下來, 當時奧圖當個中學教員, 這一婚姻所生的小孩爲弗利雪俄夫 (Frittiof) 生於1894年, 羅爾夫 (Rolf), 1895年生, 安娜 (Anna)1896年生及艾立克 (Erik)1901年生。

2. 教育

當羅爾夫於1902年上學時, 一下子就直接上二年級, 因他已會讀和寫了。也因此他的學習就顯有些乏味。

但在學校時他的表現很傑出, 得到不少師長的偏愛, 羅爾夫也學習了德文及法文, 並從而奠定了他語文方面的特異稟賦, 不過他這方面語文的流利是他到外國旅行後才發展

出來的。但他最好的老師還要算他的父親, 他教羅爾夫最後學年的數學及物理。他母親馬格利特是個傑出的鋼琴家, 弗利雪俄夫及羅爾夫倆兄弟總喜歡躺在鋼琴下聆聽母親的演奏。在羅爾夫13歲時他和他哥哥進了管弦學校, 並成爲有相當造詣的音樂家。

羅爾夫在中學表現的很好, 一直在班上名列前茅, 他主要的興趣依次是古典文學及數學, 在進入大學之前的中學生活裡, 他已讀了林德諾夫 (Lindelöf) 的"高等分析介紹"並做了該書全部的習題, 於1913年他進入了赫爾新基大學, 而林德諾夫 (爲羅爾夫父親的一位表兄弟) 在該校是個出色的科學家 (數學家—譯者註), 他的講課 (用瑞典語) 深入問題中心, 使聽衆能即刻進入狀態及注意聽講。林德諾夫是是位很熱誠的人, 很能引起人的注意, 他用忠告及指正來幫助羅爾夫。對他工作的最高讚賞是"解釋的很恰當"。在那同時, 林德伯格 (Lindeberg) 及約翰森 (Johansson) 爲兩位教授, 而艾弗森 (Iversen) 爲一助教。

在1918到1919年間他寫了他的博士論文, 他花了很大的精力先把它寫的很精簡, 事後他再把文稿再重新寫。幾年後, 卡來台俄多雷 (Caratheodory) 有所感說道 "先進的思想創生於一瞬間, 但它的發展及基礎要經過數十年的努力"。

3. 家庭

1911年時, 羅爾夫及弗利雪俄夫回到勇蘇 (Joensuu) 重溫他們的童年生活並到威伯格他們的姨媽愛麗絲那住了4天。愛麗絲的女兒瑪俐對羅爾夫很有好感,6年後他倆訂婚並於1919年6月4日結婚, 同天羅爾夫取得了博士學位。

1945年, 羅爾夫在協助成立室內音樂會社時, 遇到了西尼卡 · 卡里約–維莎白, 一位女作家及傑出的翻譯家, 特別是有關多馬斯 · 馬思的作品。羅爾夫的第一個婚姻就告觸礁, 並於1958年在巴黎由芬蘭大使主婚的。

4. 事業

當羅爾夫在1919年畢業時, 大學沒空缺的職位, 所以他只得當一個中學教師。1920年蘭道 (Landau) 邀請他去哥丁根大學去, 而他於1924年才去了那裡。

在那幾年中, 他建立了以他名字冠稱的理論。特別在位勢論方面的工作是和弗利俄雪夫一齊合作的, 羅爾夫在1922時擔任赫爾新基大學的講師, 1926年升任爲講座教授, 並才開始中斷在中學的教書, 晚上及星期天對他而言都是很好的時間作研究, 而內伐里納理論受到他和弗利雪俄夫討論的很大影響, 倆人終其身都一直相互地討論。

羅爾夫經常喜歡個別作講演及教導。他只對要講的主題作一大略的準備, 然後再設法加以補充及改進。有時會在黑板寫此與其它方面相關的東西, 稍後他會把他講的寫成講義, 最後成書。

羅爾夫在1924年時訪問了哥丁根大學, 在那他見到了希爾伯特 (Hilbert), 蘭道, 哥蘭特 (Courant) 及挪色 (Noether)。希爾伯

特在聽了羅爾夫的一個演講後稱道 “你已在數學的牆上打了一個洞, 不久後, 其它數學家會來設法把它塡補回去”。但改變的風一直吹穿過這個洞。後來羅爾夫在墨尼黑會見到亞力山得諾夫烏里松 (Urysohn) 及卡來台俄多雷。

蘭道在那段期間是每天 6 小時工作, 接著休息 6 小時, 當工作在半夜開始時, 蘭道通常會找他的助手協同他工作。當羅爾夫把這故事在蘇麗赫 (Zurich) 講後, 他自己就被人加上“蘭道”的綽號。

羅爾夫跟法國人的交道是在 1926 年開始, 那是林德諾夫安排他到巴黎去, 在那他會到了哈大瑪達 (Hadamard) 及孟特耳 (Montel), 他第一次去蘇麗赫是在1928年由拉斯 · 阿爾福斯陪同, 羅爾夫向阿爾福斯提出的“旦雪華臆測 (Denjoy Conjecture)”, 阿爾福斯證明了此臆測並使他因此於1936年贏得首次頒發的費爾滋獎 (Fields medels)。

羅爾夫曾拒絕了去蘇麗赫繼承魏爾 (Weyl) 的職位, 於 1936-37 年, 羅爾夫又去了哥丁根大學擔任客座教授, 在那他有了第一個助教, 名叫魏笛區 (H. Wittich), 他還遇見了赫格樂次 (Herglotz), 並覺得他是位“極有趣”的人。

在二次大戰期間, 羅爾夫發明了一種檢查彈道表的方法。1941年他爲了赫爾新基大學的校長, 1945年他被迫辭去校長的職務, 毫無疑問, 理由是因他的親德國。

羅爾夫在1946年10月又重新回到蘇麗赫, 在那他遇到了一大批數學家及物理學家, 包利 (Pauli), 在遇見包利之後, 他稱道說“他是很少數那種一在場就會使人覺察是個天才的人”。

1948年在新成立不久的芬蘭科學院, 院長及1945諾貝爾化學獎得主, 弗怛恩 (A. I. Virtanen) 之鼓勵下加入他曾一度拒絕加入的科學院, 成爲12名院士之一。(在當時院士是支薪的, 但現在就沒有了。) 羅爾夫在蘇麗赫一直連續擔任了15年的客座講座教授, 其間他培養的學生有利俄圖 (O. Lehto)、沙雷俄 (L. Sario)、凱樂 (H. Keller)、史點勒 (A. Steiner)、司徒雷伯耳 (K. Strebel) 及艾爾溫 (G. Elfving)。

二次大戰後, 羅爾夫的興趣轉到變分法及物理上去了。他也很關注如何引進第一台計算機到芬蘭及把計算機科學成爲大學的一門學問。

從1959年到1962年羅爾夫任國際數學協會 (I.M.U) 的主席, 那段期間, 協會的秘書是羅爾夫的好朋友錢德勒世克哈倫 (K. Chandrasekharan), 其人在1971年也做了主席。

內伐里納具有相當保守的觀點, 他不認爲集合論是在中學用來介紹數學最好的。他也不願看到小孩被寵壞, 他認爲這樣會使他們將來感到生活的艱苦。他常說“不成熟及不現實的急進主義者會在生活與現實的艱苦學校中改變過來”。但他對芬蘭以至世界都持著樂觀的看法。

羅爾夫一直不需要什麼睡眠, 在1930年末期, 他通常早上4點起來, 10點起與家人相聚, 直到中午, 然後一直工作到下午7點, 接著和他家人共渡晚間。

後來, 他將死時, 他仍問醫生“我是否可以再工作?” 當他聽說他不能再繼續工作時他就不再吃東西只進些流質。他最後在寧靜安詳中去世, 事後他醫師說“我有著上百的病人, 但他是第一個對我有些教導的人”。

羅爾夫沒被他的後代所忘掉。有一男孩對他的數學老師說“ 我的曾祖父是羅爾夫 · 內伐里納”。當這位老師回問說“他是誰啊?”小孩回答說 “你若不知道他那你就懂不了什麼數學了”。

5. 榮譽

相對, 內伐里納理論的重要性, 他的榮譽來到的顯的有些晚, 但在後來的30年中, 榮譽接踵臨到。他得到的榮譽博士學位有海得爾堡大學 (Heidelberg, 1963年), 布哈勒司特大學 (Bucharest, 1942), 基森大學 (Giessen, 1952), 柏林大學 (Berlin, 1955), 亞維司基來大學 (Jyvaskyla, 1969), 格拉司歌大學 (Glasgow, 1969), 烏普沙拉大學 (Uppsala, 1974)。他於1959年當選爲倫敦數學會的榮譽會員。他也爲下列學院或學社的榮譽會員, 芬蘭科學與人文學院 (1975), 德國科學院 (1938), 芬蘭數學學會 (1955), 瑞士數學會 (1962), 芬蘭保險學會 (1965), 哥丁根學院 (1967), 瑞典皇家學院 (1967) 爲年籍會員, 匈牙利學院 (1970), 法國學院的通訊員 (1967), 及哥丁根大學 (1937) 的榮譽會員及蘇麗赫大學 (1948) 的榮譽教授及芬蘭文化基金會的榮譽主席。

他得到芬蘭政府的白玫瑰級的大十字勳章及爲芬蘭獅子級第一等勳章的頭銜, 他因在1939-40戰爭期間的特出表現, 獲得了二等沒佩劍的自由十字勳章。

6. 數學工作

內伐里納1919年的博士論文及其後之續文 (1926b) 與研究滿足在 $|z|<1$, $|f(z)|<1$ 的解析函數, 及在給定點 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 上取給定值 $w_1,w_2,\ldots,w_n$ 有關的, 其主要問題是探討上類函數的存在性, 若有了那樣一函數對再取點 z_{n+1} 其相應的值 $f(z_{n+1})$ 的伸縮性或範圍。此問題可以依點數逐次解決, 並得到一些先前已知的結果, 此理論曾較先爲匹克 (Pick) 在1915年得到, 但較欠周全。(今通稱“Nevanlinna-Pick 值定理”, 譯者註)。

1921年時本文作者到有星狀單一函數方面, 係數的一精確估計, 不過羅爾夫 · 內伐里納的鉅大國際聲譽, 來自冠以他姓名的值分布論 (Value distribution theory)。利俄圖在1982年的文章上曾很生動地報導此理論的起始及背景, 這對我下面的介紹也受惠很多。

1880年匹卡 (Picard) 證明他的有名的定理, 它是說在任一個 (非常數–譯者加) 的整函數 (entire function) 取得所有至多有一個例外的複數值 (例如 e^z 有一例外值 0, 因 e^z 永不爲 0,–譯者加) 一個很自然的問題, 是我們能否進一步對不同的值 a 方程 $f(z)=a$ 的根, 作進一步的瞭解? 設 $n(r,a)$ 表 $f(z)=a$ 在 $|z|<r$ 內的根的數目 (重根計其重覆度–譯者加注), 則所有這些根 (即在 $|z|<\infty$ 整個複平面上–譯者加注) 的收斂指

數 (exponent of convergence) 或級 $\rho(a)$ 可表爲如下:

$$\rho(a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,a)}{\log r}。$$

哈大瑪達(1873年) 曾證明了: 若記號

$$M(r)=M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

及 f 的級定義如下:

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

則對每個 $a,\rho(a)\leq\rho$。

波雷爾 (Borel) 於1897年把匹卡定理作了顯著的推廣, 他證明對每個至多一個例外的值 a, $\rho(a)=\rho$, 並且這樣一個例外值的存在, 當只有當 ρ 爲一正整數或 $+\infty$ 時才會發生。有關無窮級時的結果波雷爾只指出此結論, 但後來由布魯門梭 (Blamenthal) 於1910年證明的。

以上的理論是基於一事實即可把任一有窮級的整函數用一乘積形式表示, 這是哈大瑪達於 1893 年得到的結果。這樣的理論有些缺陷, 這套理論缺乏精確性及對無窮級的整函數或一般有理整函數 (meromorphic function, 即由兩個整函數的商式表示, 如 $(e^z+1)/\sin z$, 此種函數就像有理數是整數的商式, 爲整函數的一自然推廣, 又通稱爲亞純函數–譯者加注) 無法施用。因對有理整函數而言 $M(r,f)$ 就不適宜用來作爲其增長作的量度, 因 $M(r,f)$ 在有極點的圓周上變成無窮大了。

內伐里納於 1920 年代對上面提的缺憾作了空前的改革, 他採用了劍森 (Jensen) 1899年得到的一結果。即

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta+\sum\log\frac{r}{|b_i|}-\sum\log\frac{r}{|a_j|}\qquad(1)$$

其中 a_j 及 b_i 等分別表 $f(z)$ 在 $|z|\leq r$ 內的零點及極點 (不妨設 $f(0)\neq 0,\infty$, 譯者註)

依據伐里隆 (Valiron, 1913年), 他記

$$\sum\log\frac{r}{|a_j|}=\int_0^r\log(\frac{r}{t})dn(t,0)=\int_0^r\frac{n(t,0)}{t}dt=N(r,0);\qquad(2)$$

$$\sum\log\frac{r}{|b_i|}=\int_0^r\log(\frac{r}{t})dn(t,\infty)=\int_0^r\frac{n(t,0)}{t}dt=N(r,\infty)。\qquad(3)$$

然後他又記 $\log^+x=\max(\log x,0)$, 於是

$$\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x},\quad x\geq 0$$

及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}d\theta。$$

上面看來簡單, 但卻是很重要的一個新步。

記

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$$

及對任一有限的複數 a, 記

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|\frac{1}{f(re^{i\theta})-a}|d\theta,\qquad(4)$$

則劍森公式可改表爲如下 [1924c]。

$$\begin{aligned}&m(r,\infty)+N(r,\infty)\\&=m(r,0)+N(r,0)+\log|f(0)|。\end{aligned}$$

阿爾福斯 [1976年]寫說這個式子就是內伐里納理論的開端是一點都不錯的。在此結果中將 $f(z)$ 代以 $f(z)-a$, 則易見 $N(r,\infty)$ 不變, 但 $m(r,\infty)$ 至多改了 $\log^+|a|+\log 2$。(即 $m(r,\infty)-m(r,a)\le\log^+|a|+\log 2$, 此可由不等式: $\log^+|\sum_{i=1}^p z_i|\le\log^+(p\max_{i=1,\ldots,p}|z_i|)<\sum_{i=1}^p|z_i|+\log p$ 推出–譯者註), 於是我們可得到第一基本定理如下:

$$\begin{aligned}&m(r,\infty)+N(r,\infty)\\&=m(r,a)+N(r,a)+\log|f(0)-a|+\varepsilon(a)\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon(a)$ 表滿足 $\varepsilon(a)\le\log^+|a|+\log 2$ 的一數量。

設 $f(0)\ne\infty$, 內伐里納記

$$T(r,f)=m(r,\infty)+N(r,\infty) \qquad (5)$$

並稱 $T(r,f)$ 爲 $f(z)$ 的特徵函數。於是第一基本定理表示 [1925g]對任何一個 a 值 (包抱 $a=\infty$) 但 $a\ne f(0)$,

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,f)+O(1) \quad (6)$$

其中 r 爲變數。對 $f(0)=a$ 或 ∞ 時, 只需一點點修飾, 我們就不在此計較了。

函數 $T(r,f)$ 對任何一個在整個複平面或一圓盤內的亞純函數的增長, 給出了非常好的描述。它爲 $\log r$ 的一漸增凸函數 (即 $\frac{T(r,f)}{\log r}$ 最終爲漸增的—譯者註), 若 $f(z)$ 爲一整函數, 則 $T(r,f)$ 與 $\log M(r)$ 有相等的增長率, 所以我們可以在 (2) 中用 $T(r,f)$ 來代替 $\log M(r,f)$ 以定義任意一個亞純函數或整函數 f 的級。另一方面由式 (6) 可以看到在某種意義下, f對每個a值, 取相應的 M 及 N 的量度相加具有一密切關係。但後者是計數 $f(z)=a$ 在 $|z|\le r$ 內的根數, 而前者是量度 $f(z)$ 在 $|z|=r$ 上與 a 值的距離的一平均。由此我們立即可得到 (前面提的) 哈大瑪達不等式對任何一個 a, $\rho(a)\le\rho$。

但是內伐里納的目的是想要對波雪爾不等式精度上有所改進。他的方法是證明了一般在式 (6) 中, $N(r,a)$爲主宰的項。更精確說他證明了 (1925g), 對任何 $q\ge 3$, 則

$$\begin{aligned}&(q-2)T(r,f)\\&\le\sum_{i=1}^q N(r,a_i)-N_1(r)-S(r)。\quad (7)\end{aligned}$$

這就是所謂的第二基本定理, 此處 $N_1(r)$ 是有關 f' 的零點及 f 的多重極點的數量, 即所有 $f(z)=a$ (a 爲任意一複數及 ∞) 的重根 p 次者算 $p-1$次, $p=2,3,\ldots$ 的總和, $S(r)$ 爲一比 $T(r)$ 小很多的項。例如當 f 爲複平面上亞純函數

$$S(r)=O(\log rT(r)),$$

但若 f 爲無窮大級時, 上面的估計式可能要除去一個有限測度的 r 值。

但在這要指出的是內伐里納只證明 (7) 在 $q=3$ 的情形。但這足夠得到比波雷爾結果強得多的形式。即若 f 在整個平面上爲超越的亞純函數, (即不是一有理函數–譯者註), 則除了可能兩個例外的 a 值外

$$\lim\frac{N(r,a)}{T(r)}\ge\frac{1}{3}。$$

又除了兩個 a 值外, $\rho(a)=\rho$。

式 (7) 推廣到一般的 q 是幾乎同時由立特勿德 (Littlewood) 在一封給內伐里納的信中及庫令勿德 (Collingwood) [1924] 得到的。內伐里納立即看出此一推廣的重要性把它編入論文 (1925g) 中作爲一附錄用來得到下面的缺量關係式:

$$\sum \delta(a) \leq 2,$$

其中

$$\delta(a)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a)}{T(r)}=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,a)}{T(r)}$$

此結果隱示除了一個可列的 a 值集合外, $\delta(a)=0$ 如果我們把重根只計一次以 $\overline{N}(r,a)$ 來表相應的記數函數, 則可得一更強的結果, 如設

$$\theta(a)=1-\varlimsup\frac{\overline{N}(r,a)}{\overline{T}(r)},$$

則利用式 (7) 中的 $N_1(r)$ 項, 可得 [1926年]

$$\sum \theta(a) \leq 2。 \tag{8}$$

內伐里納並定義 [1929a]了所謂的分歧指標 (ramification index, 德文爲 verzweigungs index) 如下:

$$\mu(a)=\varliminf\frac{N(r,a)-\overline{N}(r,a)}{\overline{T}(r)}。$$

則可得 $\theta(a)\geq\mu(a)+\delta(a)$ 及

$$\sum \delta(a)+\sum \mu(a) \leq 2。 \tag{9}$$

有關式 (9) 完備的精確性直到最近1977年由覺來新 (Drasin) 證明, 他能對任意給定滿足 $0\leq\delta(a)+\mu(a)\leq 1$ 及式 (9) 之情況下的一簇 $\delta(a)$ 及 $\mu(a)$ 值, 建造出一個亞純函數 f, 其對每個 a 具且僅具有所給定的 $\delta(a)$ 及 $\mu(a)$ 等值。

若要是去列舉許多由內伐里納本人及其他的人用第二基本定理 (7) 及其結果 (8), 所得的漂亮應用會把我們引得離本文太遠了, 在這舉一個 [1926年]的例子。設 f_1 及 f_2 爲兩個超越的亞純函數, 如有5個不同的值 a_1,a_2,a_3,a_4 及 a_5 使得 f_1 及 f_2 取 $a_i(i=1,2,3,4,5)$ 的點集 (不計重度) 皆相同, 則 $f_1\equiv f_2$。若要求重度也一樣, 則只要有4個如此的值結論成立, 除非此四個值有一種調和的關係, 這時兩個函數不等, 但會不取4個值中的兩個值, 設 a_2,a_4 及 $f_1=S(f_2)$, S 爲一分式線性變換 S 將 a_2 及 a_4 互調, 但保持 a_1 及 a_3 不變爲不動點。相應的有窮級整函數及3個值 (有限) 時, 早先由波里雅 (Polya)1921年就得到了。

此理論到目前爲止可說幾乎完備了, 已經收錄在內伐里納著名的專論 [1929a]中, 但其中大部份已在 [1925g]一文中刊載, 該文據利伐圖認爲是內伐里納最重要的工作。魏爾 (Weyl) 於1943年稱讚該文“爲本世紀少有的偉大數學事蹟之一”。

到目前爲止, 所有的證明都是解析性的及基於劍森定理的推廣, 其被發明者內伐里納稱之爲坡松-劍森 (Poisson-Jensen) 定理。此後此定理在函數論方面扮有根本性的角色, 竟達到有次波艾司 (Boas) 對我說 (或帶有些誇張性)“任何有關亞純函數的結果, 如果不是經由坡松-劍森定理導致的就不

會是正確”。而坡松-劍森公式是可依據劍森公式 (1) 並將 $|z| \leq r$, 映照到本身同時把 0 映到一特定的點 ξ 的分式線性變換, 這樣一來可將 $\log|f(\xi)|$, 可藉由邊界值 $\log|f(re^{i\theta})|$ 及 f 在 $|z|<r$ 內的零點及極點來表示。解析的技巧使得人們很容易去比較一些函數的和、乘積、導函數及其它組合的特徵函數及值分布的性質。然而在1930年代初期, 引進了兩個技巧新照亮了值分布論, 一個就是阿爾福斯 [1929年]及多少有點歸日人清水辰次郎–譯爲註 (Shimizu) 的幾何方法及另一個弗羅司特曼 (Frostman) 的位勢論方法。第一種方法得到同樣的第一基本定理形式, 即 (阿爾福斯 [1929], 清水辰次郎 [1929]):

$$m_0(r,a)+N(r,a)=T_0(r)+m_0(0,a)。$$

這兒 $T_0(r)$ 爲 $|z|<r$ 在映照 $f(z)$ 之下在黎曼球面上的映像集計重度的面積 $A(r)$ 的對數的積分, 同時

$$m_0(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{k(f(re^{i\theta}),a)}d\theta$$

其中

$$k(w_1,w_2)=\frac{|w_2-w_1|}{\sqrt{(1+|w_1|^2)(1+|w_2|^2)}}$$

爲在黎曼球面上兩點 w_1, w_2 的弦距。利用這些想法, 阿爾福斯於 [1935年]得到了一個第二基本定理, 把 $A(r)$ 和在 $|z|=r$內被 p 對1地映照到相互不相交的單連通域 D_ν 的區域 (稱爲島嶼) 的數目, p 爲島嶼的覆蓋度。

內伐里納於 1936 年, 把弗羅司特曼 [1935]的容量 (Capacity) 的概念作推進得以證明 [1936a]。對給定的正數 $\alpha>\frac{1}{2}$, 任何在 $|z|<R$ 內特徵函數爲無界的函數, 下式:

$$m(r,a)=O\{T(r)^\alpha\} \quad r\to +R \qquad (10)$$

對所有的 a 值, 除了一個具容量爲 0 的值的集合 E 外成立。另一方面, 若 E 爲任一容量爲 0 的密緻子集, 則必存在有一在 $|z|<1$ 具有無界特徵函數的函數 f, 其不取任何E中的值。於是對任何 $a\in E$, 當 $r\to 1$ 時

$$N(r,a)=0, \quad m(r,a)=T(r)+O(1),$$

與此相關的結果, 容許較大的例外值集, 更強的結果, 稍早已由立特武德 [1930]及阿爾福斯 [1931]所得, 內伐里納早在 [1925g]中就證明若 $f(z)$, 在平面上的特徵函數爲有界的, 則只有當 f 爲一常數, 在有限的圓盤 $|z|<R$ 上的特徵函數爲有界時只有當 $f=f_1/f_2$, 此處 f_1 及 f_2 在 $|z|<R$ 內爲正則的且在 $|z|<1$ 上, $|f_j(z)|<1$; $j=1,2$。於是式 (10) 可視爲與函數在孤立奇異點鄰域擧止的魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 定理的一深遠的推廣, 內伐里納 [1936c]也曾討論容量爲 0 的豪司道夫 (Hausdorff) 測度及得到廣義的康托 (Cantor) 集的一完整刻劃。在這段期間另一些貢獻包括有發明了調和測度及其相關連的原理, 哈大瑪達的三圓定理得以有一強力的推廣, 內伐里納曾在 [1933e] 中用一相關的構想得到密爾魯 (Milloux) 不等式的確切形式, 該結果同時由伯林 (Beurling)[1933]得到, 其一較弱形式稍早由史密特 (Schmidt)[1932]得到, 現一般稱之爲史密特–伯林不等式, 其實並不是很恰當的, 它在整函數的研究中已顯示出爲一根本工具,

這些及其它一些結果編寫成書 [1936a]自書出後對函數論者有了很大的啓示, 該書也如同他後來寫的一些書, 被翻成俄文及英文以及有幾版德文的。

和上面所提到的內伐里納的貢獻, 他其它的工作就顯得處於下風了, 他終其身不斷地寫了許多論文及書, 包括不同的課題由彈道學 [1943a] 到教育 [1953d,e]。他在黎曼面 (Riemann Surfaces) 的書 [1953d]是此課題方面最有價值的書之一。潑利次耳 (O. Pretzel) 有次告訴我, 他覺得對羅爾夫和弗利雪俄夫合寫的有關兎坐標分析一書 [1959f]很有興趣。內伐里納和巴台魯 (Paatero)[1965c]寫了一本 (解析函數論方面的–譯者註) 初等教科書 [1965c]。然而在他一篇綜述性的演講 [1966b]中, 他對複分析方面1936年以後的進展, 一字未提。或許是因爲他並沒積極關注世界各地爲數日多的年青敬佩者, 對他的理論所作的種種改良及應用。有關這方面理論一直到1975年的種種成果可參閱阿爾福斯 [1976]一文。

在過去一兩年間立克曼 (S. Rickman) 作了一突破, 他將匹克定理推廣到由 R^n 到 R^n 的擬正則 (quasiregular) 映照上去, 當 $n > 2$ 時, 那是一個和正則映照, 最相近的一概念, 內伐里納的一些構想在立克曼的證明中發揮了主要性的功用, 譬如虧量關係式, 毫無疑問的此理論會在今後多年中盛放的。

譯者尾註:

事實上值分布論在中國也很早就受到它的影響, 熊慶萊及庄圻泰都是這方面研究的姣姣者, 他們也培養及帶動一大批優秀的中青年人繼續把值分布的理論及應用深入化。值得一提的是, 值分布論方面近年的一個突破是著名的 Nelvnlinna 臆測, 即第二基本定理, 當 q 個值用 q 個小函數來取代仍然成立, 已在1986年被史旦米茲 (Steinmetz) [J. Reine Angeiv Math. 368 (1986), 134-141]所證明, 而其證明用的關鍵技巧是來自庄圻泰教授的, 目前值分布理論被應用來探討所謂分解論的一新課題。譯者算是這方面研究的先驅者 [參看庄圻泰–楊重駿所著的亞純函數的不動點與分解論, 北大出版社, 1988年]。現這方面研究已開始推展到多複變數的亞純函數或映照上來 [參看譯者和龔昇主編的 Several complex variable in China, Contemporary Math. Series Vol. 142, A.M.S. , 1993], 另外是有關5值定理以及一些推廣在近年來也有許多進展及推廣。這些已編入由譯者和儀洪勛所著的“亞純函數唯一性理論”, 已由中國科學出版社, 1995年9月出版。

参考文獻

1. (1925g): “Zur Theorie der Meromorphen Finktioner,” Acta Math. 46, 1-99。
2. (1926): “Einige Eindeutigke fsatze in der Theorie der Meromorphen Funktioner” Acta Math. 48, 367-391。
3. (1929a):Le theoreme de Picard-Borel et la Theorie des fonctions meromorphes, Gauthier-Villdos, Paris, 1929。
4. 阿爾福斯 (1929):“Beitrage zur Theorie der Meromorphen Funktionen”, (R.7e Congr. Math. Scand Oslo(1929), 84-88。
5. 淸水辰次郎 (1929):“On the theory of meromorphic funetions”, Japan J. Math. 6(1929), 119-171。

6. 阿爾福斯 (1935):“Zur Theorie der Uberlagerungsflachen”, Acta Math. 65, 157-194。
7. 弗羅司特曼 (1935): Potentiel d'equilibre et Capacite des ensembles a vec quelques applications a la theorie des fonctions”, Meddel Lands Univ. Mat. Sem. 3, 1-118。
8. 內伐里納 (1936a):Eindentige Anllytisde Fonktionen, die Grundlehren der Math. Wiss 46, Springer Berlin。
9. 立特武德 (1930) Mathematical Notes (11): On exceptional values of power series J. London Math. Soc. 5(1934)82-87。
10. 阿爾福斯 (1931):I. Ahlrors, Ein Sarz von Henre Cartan und seine Anwendung auf die Theoric der meromorphen Funktioncn, Soc Sci Fenn Comment. Phys.-Math. 5, 16(1931), 1-19。
11. 內伐里納 (1936c): Ober die Kapazität der Cantorschen Punktmengen, Monatshefte für Mathematik und Physik 43 pp.435-447。
12. 內伐里納 (1933e): Unber das Wesen der exakten Forschong sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenchaften zu Marbrug 67 (1932) (Berlin), pp.119-149。
13. 伯林 (1933):A. Brurling, Etudes sur un probleme de majoration, These, Uppsala. 1933。
14. 史密特 (1932):E. Schmidt, Ueber den Millouxschen Satz, Sitzmgsber. Preuss Akad. Wiss Phys. Math. KI. 25(1932). 394-401。
15. 內伐里納 (1943a):Bcrechnung der Normalflugbahn eines Geschosses, Ann. Acad Sci. Fenn Ser. A. I. Math.-Phys. 15,8。
16. 內伐里納 (1966e):Reform in teaching mathematics, Amer. Math. Monthly 73, pp 451-464; 13, pp13-31
17. 內伐里納 (1966d):Reform des mathematischen Unterrichts in der Schule , Math. Phys. Semesterber (Neue Folge).
18. 內伐里納 (1953d): Uniformisierung, Die Grundlehren der math. Wiss 64 (Springer - Verlag, Berltin - Gottingen Heidellberg), 10 + 391。
19. 內伐里納 (1959f):(With F. Nevanlinna) Absolute Analysis, Die Grundlehren der math. Wiss. 102 (Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg), 8+259。
20. 內伐里納 (1965c) (With V. Paatero) , Einführung in die Funktionentheoriü. Lchrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe 30 (Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart), 388。
21. 內伐里納 (1966b):Entwicklung der Theorie der eindcutigen analytischen Funktionen einer komplexen Vcranderlichen scit Weicrstraβ , Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weicrstraβ 1815-1965. Wissenschafiliche Abhandhmgen der Arbeitsgemcinschaft für Forchung des Landes Nordrhcin-Westfalen 33. (Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen). pp.97-122.
22. 阿爾福斯 (1976) I. Ahlfors, Das mathematische Schatten Rolf Nevanlinnas, Ann Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Vol 2(1976). 175-201。

—本文作者任教於香港科技大學數學系—