欄柵前面的思考——
不含定距元素的組合問題

柳柏濂

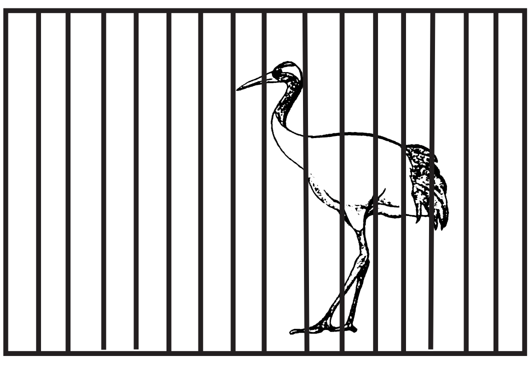
一. 改造猴子籠

圖一是一個關著白鶴的鐵籠, 籠門的鐵欄柵有15條鐵枝。

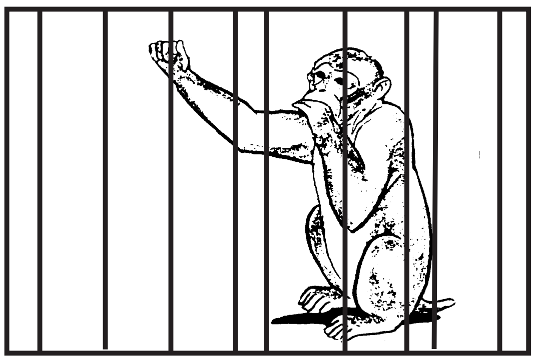
現在, 我們把這個籠子改關猴子, 猴子比白鶴大得多, 因此, 門上的鐵條可以減少, 減少的原則是: 每兩條鐵枝間的間隔最多是原來的兩倍, 否則, 猴子就會逃之夭夭。(圖二)

如果我們要在原來的欄柵上, 精簡出6條鐵枝, 那麼, 有多少種刪取鐵枝的方案?

誠然, 如果請你隨便拿出6條鐵枝來 (只要猴子不會跑掉), 這是一個輕而易舉的問題。一個最普通的做法是: 從欄柵由左至右相隔一枝依次取出6枝便可。



圖一



圖二

現在的問題是: 有多少種令猴子不會跑掉的取鐵枝方案, 這不是一個用枚舉方法可以輕易解決的問題, 特別是原來柵欄鐵枝相當多的時後。當然, 若所取的鐵枝太多時, 合要求的取法可能不存在, 例如, 在上述的欄柵中, 不能取出9條鐵枝來。

既然, 我們知道: 取6條鐵枝的方案不少, 那麼, 一個自然應該思考的問題是: 這些形形色色的方案裡, 有一些什麼樣的共同特點?

稍作思考, 不難知道, 取出的鐵枝沒有兩條相鄰, 否則, 鐵籠就有一個至少是原來3倍寬的間隔, 猴子將會出入自如。於是, 問題歸

結爲: 從排列成一直線的15條鐵枝中, 任取6枝, 使它們無兩枝相鄰的取法數。

為方便思考, 我們可以把問題更加數學化, 抽象成下面一個典型的數學問題:

問題1: 從 $1, 2, \ldots, 15$ 中取出6個數, 使它們無兩個數相鄰, 有多少種取法?

設我們取出的6個數是 $\{a_1, a_2, \ldots, a_5, a_6\} \subset \{1, 2, \ldots, 14, 15\}$, 不妨令 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$。

"不相鄰"這個日常用語的數學意義, 可表述爲:

$$a_i - a_{i-1} > 1, \ i = 2, 3, 4, 5, 6$$

或

$$a_i > a_{i-1} + 1 \tag{1}$$

如果 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ 是某個有限數集中的任意6個不同的數, (2)

則這是一個容易解決的問題, 但因 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ 增加了條件 (1) 的約束, 問題就變得稍爲棘手。

一個自然的想法是: 把條件 (1) 轉化爲條件 (2)。於是, 我們便有下面的做法:

把 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ 依次減去 $0, 1, \ldots, 5$ 後所得到的數記爲 $a'_1, a'_2, \ldots, a'_6$。即

$$\begin{array}{rcccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & a_1 & a_2-1 & a_3-2 & a_4-3 & a_5-4 & a_6-5 \\ & (a'_1) & (a'_2) & (a'_3) & (a'_4) & (a'_5) & (a'_6) \end{array} \tag{3}$$

這裡, 因爲條件 (1), 我們便有 $a'_i \geq a'_{i-1}+1$, $i = 2, 3, \ldots, 6$ (注意: 這裡比 (1) 式多了一個等號), 也就是說, $a'_1, a'_2, \ldots, a'_6$ 是相異的自然數。這6個自然數最小可能是1, 最大可能是 $a'_6 = a_6 - 5 \leq 15 - 5 = 10$。於是, 我們把問題1轉化爲

問題 $1'$: 求由 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 中任意取出6個相異數 的方法數?

我們不難看到, 數組 $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ 與 $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_6)$ 是一一對應的。因 $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_6)$ 的不同組數有

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{4!6!} = 210。$$

即問題1的取法有210種。

至此, 我們可以想到一般的問題:

問題2: 從 $1, 2, \ldots, n$ 中任取 k 個數, 使之無兩個數相鄰, 有多少種不同的取法?

早在19世紀, 數學家吉高 (Gergonne, 1812 [1]) 已經解決了這個問題。(有些文獻稱, 此結果由 Klaplansky 在 1943 年得到, 見 [2], 本文依據文獻 [3]的說法。) 讀者可以完全仿照上面的方法, 就能推導出問題2的解是

$$\binom{n-k+1}{k} \tag{4}$$

問題1的解是 (4) 式中 $n = 15$, $k = 6$ 算得的結果。(4) 式還告訴我們, 要問題2有解, 必須 $k \leq n - k + 1$, 即 $k \leq \frac{1}{2}(n+1)$。於是, 本節開頭例子中, 要取9條鐵枝是不可能的。

當然, 如果籠子改關其它力氣更大的動物, 爲了增大安全係數, 所取出的 k 條鐵枝, 每兩條間至少要留下 l 條 $(l \geq 1)$ 鐵枝, 則

仿照 (3) 的方法, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 分別減去 $0, l, \ldots, (k-1)l$, 便得不同的取法數是

$$\binom{n-(k-1)l}{k} \tag{5}$$

讀者不難發現, (4) 是 (5) 當 $l=1$ 時的特款。(當然, 在 (5) 式中, 需要 $k \leq \frac{n+l}{l+1}$)

二. 把猩猩關進去

如果把當初的白鶴籠改關猩猩。我們知道, 猩猩比猴子大得多。因此, 鐵枝的間隔可以至多是原來的3倍。然而, 猩猩的力氣又比猴子大, 我們不容許籠子的欄柵出現這樣的一條鐵枝, 它兩邊相鄰的鐵枝均被拿去。

這是一個與上節情形相近, 但又難度增大的問題。

用數學的語言來描述, 可以表述為:

問題3: 從 $1, 2, \ldots, n$ 中任取 k 個數, 使任意兩個數 $i, j (j > i)$, $j - i \neq 2$, 問有多少種不同的取法?

(請對照問題3與問題2有何不同?)

直觀地說, 從 $1, 2, \ldots, n$ 中取出的 k 個數中, 不存在相隔一位的兩個數。這種取法數, 我們記為 $f(n, k)$。

沿用第一節中的組合方法, 已經很難直接求出 $f(n, k)$。然而, 我們可以探求間接的方法, 即尋求 $f(n, k)$ 的遞歸關係。

我們先看兩個特定的元1,2。

在取出的 k 個元中, 可作下列的分類:

$$\begin{cases} 1\text{類: 不含元}1 \\ 2\text{類: 含元}1 \begin{cases} 2.1\text{ 類: 不含元}2 \\ 2.2\text{ 類: 含元}2 \end{cases} \end{cases}$$

易見, 所有第1類的 k 個元的取法數是 $f(n-1, k)$。現考慮第2類 k 元的取法: 對2.1類的 k 元, 必不含3, 故取法數是 $f(n-3, k-1)$, 而對2.2類的 k 元, 必不含3及4, 因此取法數是 $f(n-4, k-2)$。

綜上所述, 便得

$$\begin{aligned} f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-3,k-1) \\ + f(n-4,k-2) \end{aligned} \tag{6}$$

不難看出, 初始條件 $f(n, 1) = n$, $f(1, k) = 0, k > 1$, 我們約定 $f(n, 0) = 1$

於是, 由 (6) 式, 運用遞歸關係, 特別是借助於電腦, 不難由初始條件, 對於某個 n, k, 算出 $f(n, k)$ 的值。

正如我們所見,(6) 式是不難用組合方法得出的。然而, 要從 (6) 式導出 $f(n, k)$ 的一個顯表達式是很不容易的。

儘管問題2與問題3相當類似, 可是, 問題2是早在19世紀已被解決的古典問題, 而問題3的顯式卻推遲到本世紀80年代才被解決。

1981年柯瓦利納 (J.Konvalina, [4]) 證明了

$$f(n,k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1-k-2i}{k-2i}, \\ \qquad \text{若 } n \geq 2(k-1) \\ 0, \text{若 } n < 2(k-1) \end{cases} \tag{7}$$

這裡, $h = [k/2]$。

以第一節例子的 $n = 15$, $k = 6$, 由 (7) 式, 因 $15 > 2(6-1)10$, 可算得

$$f(15, 6) = \sum_{i=0}^{3} \binom{15+1-6-2i}{6-2i}$$

$$= \binom{10}{6} + \binom{8}{4} + \binom{6}{2} + \binom{4}{0}$$
$$= 296。$$

柯瓦利納證明 (7) 式的方法是驗證 (7) 的右邊表達式既滿足 (6) 式的初始條件, 又滿足 (6) 式的遞歸關係。

柯氏用到的方法和技巧並不複雜, 可是, 令我們驚異和感興趣的是: 柯瓦利納是如何一矢中的地猜出 $f(n,k)$ 的表達式 (7)?

柯氏沒有說出這一點。讀完他的論文後, 我們也理不出他的探索思路, 但是, 從柯氏僅孤立地解決問題3, 而不能由此進一步推廣解決下述問題4 (他自然應該想到了問題4), 我們有理由相信, 結果 (7) 是憑數學靈感歸納和猜測出來的。

三. 畢其功於一役

柯瓦利納的論文在 1981 年剛一發表, 對照問題 2 和問題 3, 幾個學者幾乎同時 (見 [5] [6] [7] [8]) 想到下列一般的情形。

問題4: 從 $1,2,\ldots,n$ 中任取 k 個數, 使之任意兩個數 $i,j(j>i)$, $j-i\neq m$, 問有多少種不同的取法?

若把這種取法數記爲 $F_m=(n,k)$ 。直觀地說, $F_m(n,k)$ 就是在序列 $1,2,\ldots,n$ 中取 k 個無 $(m-1)$ 間隔元的方法數。

顯見, $m=1$ 即問題2, $F_1(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$。

$m=2$, 即問題3,

$$F_2(n,k)=f(n,k)。$$

如何求 $F_m(n,k)$? 求出了它, 我們對此類組合計數問題將畢其功於一役。

問題2的組合議論方法, 並不能解決這個問題, 而仿照問題3, 要導出一個形如 (6) 的遞歸式也不勝其繁。即使得到了這類遞歸式, 要像柯氏那樣, 猜出一個滿足遞歸式的解, 又談何容易!

然而, 通過了對問題4的分析, 我們發現: 若把 $1,2,\ldots,n$ 分成若干組, 每組元 (排列由小到大) 相鄰兩個元之差 (絕對值) 爲 m。每一組元被看作是一個"軌道", 那麼, $1,2,\ldots,n$ 可被分成若干條軌道。問題4的本質在於: 取 k 個元, 使之任兩個不是每一軌道的相鄰元, 則問題4不就可以轉化爲問題2嗎?

按照這個思路, 我們立即可以得到一個容易在電腦中求解的遞歸式。

定理1([6]): *若* $n=qm+r$, $0\le r<m<n$, *則對任一個整數* t, $0<t<m<n$, *記* $s=qt+\min(t,r)$, *則*

$$F_m(n,k)=\sum_{j=\max(0,k-n+s)}^{\min(k,s)} F_t(s,j)F_{m-t}(n-s,k-j) \tag{8}$$

初始值 $F_1(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$, *且約定* $F_m(n,0)=1$。

證明: 記 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ 是一個有限數列。N_t 是 N 的一個子序列, 其中 $i\in N_t$ 若且唯若 $i\equiv 1,2,\ldots,t(\mathrm{mod}\ m)$。$\tilde{N}_t$ 又是N 的一個子序列, $\tilde{N}_t=N-N_t$, 即 $i\in\tilde{N}_t$ 若且唯若$i\equiv t+1,t+2,\ldots,m(\mathrm{mod}\ m)$, 這裡, $c<t<m$。

又記 $s=|N_t|$。因爲 $n=qm+r, 0\leq r<m$, 故

$$s=\begin{cases} qt+t, \\ \text{當 } 0<t\leq r \\ qt+r, \\ \text{當 } r<t<m \end{cases}$$

即 $s=qt+\min(t,r)$。

要在 N 中取 k 個無 $(m-1)$ 間隔的元 (其取法數是 $F_m(n,k)$), 這些元必取自 N_t 或 $\tilde{N}_t$。

若在 N_t 中取 j 個元, $(j=0,1,\ldots, k)$, 則在 $\tilde{N}_t$ 中取 $(k-j)$ 個元。考察,

$$\begin{aligned} N_t: & 1,2,\ldots,t,m+1,m+2,\ldots, \\ & m+t,\ldots,(q-1)m+1, \\ & (q-1)m+2,\ldots,(q-1)m+t, \\ & qm+1,qm+2,\ldots,qm+\min(t,r) \\ & \text{若 } r=0, \text{ 則無後面的 } qm+1, \\ & qm+2,\ldots,qm+\min(t,r) \text{ 項} \end{aligned}$$

(請讀者注意上述 N_t 中每個元的規律)。

可見, 要保證在 N_t 中取的 j 個元在序列 N 中無 $(m-1)$ 間隔, 若且唯若此 j 個元在 N_t 中無 $(t-1)$ 間隔, 若把 N_t 重新按自然數順序由 1 到 s 編號, $(s=qm+\min(t,r))$, 則上述取法有 $F_t(s,j)$ 種:

又, 注意到序列

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_t: & t+1,t+2,\ldots,m,m+t+1, \\ & m+t+2,\ldots,2m,\ldots, \\ & (q-1)m+t+1,(q-1)m \\ & +t+2,\ldots,qm,qm+t+1, \\ & qm+t+2,\ldots,qm+r,(t<r) \\ & \text{若 } t\geq r, \text{ 則無 } qm+t+1, \\ & qm+t+2,\ldots, qm+r \text{ 項。} \end{aligned}$$

同理, 要保證在 $\tilde{N}_t$ 所取的 $(k-j)$ 個元在 N 中無 $(m-1)$ 間隔, 若且唯若在 $\tilde{N}_t$ 中無 $(m-t-1)$ 間隔, 其不同的取法有 $F_{m-t}(n-s,k-j)$ 種。於是

$$F_m(n,k)=\sum_{j=0}^{k}F_t(s,j)F_{m-t}(n-s,k-j),$$

注意到 $j\leq s$ 且 $k-j\leq n-s$, 便得 (8) 式。

初始條件 $F_1(n,k)$ 是第一節已得的結果。至此, 我們便完成了對定理 1 的證明。

由定理 1, 我們容易得到下列有用的系。

系 1.1: *若* $n=qm+r,\ 0\leq r<m$, *則*

$$\begin{aligned} & F_m(n,k) \qquad (9) \\ &= \sum_{j=\max(0,k-n+s)}^{\min(k,s)} F_{[\frac{m}{2}]}(s,j)F_{[\frac{m+1}{2}]}(n-s,k-j) \end{aligned}$$

這裡 $s=q[\frac{m}{2}]+\min([\frac{m}{2}],r)$,

由 (8) 式, 令 $t=1$, 並注意到 $F_1(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$, 便得

系 1.2:

$$\begin{aligned} F_m(n,k) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{[\frac{n-1}{m}]-j+2}{j} \\ & \times F_{m-1}(n-[\frac{n-1}{m}]-1,k-j) \quad (10) \end{aligned}$$

運用 (9) 和 (10) 式, 我們用電腦實現遞歸, 對於特定的 n,k,m, 不難得到 $F_m(n,k)$ 的值。然而, 作爲一個計數問題, 完整的結論應該是求出所求對象的顯計數式。事實上, 在

此, 我們已經完全能夠做到這一點。只要累次運用 (10) 式, 便得到

定理2:

$$F_m(n,k) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_m=k} \prod_{i=1}^{m} \binom{[\frac{n-i}{m}]-j_i+2}{j_i} \quad (11)$$

這一結果, 曾在文獻 [5]、[6]、[7]、[8]中, 用各不相同的方法導出。

在 (11) 式中, 令 $m=1, m=2$ 便分別得到本文問題2、問題3的結果。這從另一個側面, 驗證了 (11) 式的正確性。

至此, 我們完全解決了不含定距元素的組合數問題。不言自明, 它的意義遠遠不是僅爲了改造一個鐵籠而已。得到了一個有意義的計數式後, 掩卷沉思, 我們略有所悟: 在眞理的探索中, 往往經歷了一個由特殊到一般的歷程。然而, 只有那些最能刻畫問題本質的方法, 才能勝任對一般規律的描述。

當然, 從縱深的方向解決的一個問題, 並不意味著探索的結束。從橫寬的聯繫, 我們也可以發現新的問題。例如, 如果上述的集 N 不是一個序列, 而是分布在一個環上的排列, 那麼, 相應的不含定距元素的組合就需要新的方法 和得出不同的結果。有興趣的讀者可參見 [5]、[6]、[7]、[8]。

參考文獻

1. Gergonne, Solution dun prolème, Annales de Gergonne, 3(1812), 59-75.
2. I. Kaplansky, Solution of "problem des menages", Bull. Math. Soc. 49(1943), 784-785.
3. L. Comtet. Advanced combinationrics, D. Reidel Publishing Company, 1974.
4. J. Konvalina, On the number of combinations without unit separation, J.C.T.(A).31(1981), 101-107.
5. H. Prodinger, On the number of combinations without a fixed distance, J.C.T.(A) 35(1983), 362-365.
6. Liu Bolian (柳柏濂), A recursive formula for the number of combinations without elemennts at a fixed distance, Hunan Ann. Math. 5(1985) 2: 33-37. MR 1987i:05024.
7. Ke Xin (柯欣), A combinatorial problem, 中國組合數學論文集, 大連, 1984。
8. Chu Wenchang(初文昌), On the number of combinations without k-separations, 中國組合數學論文集, 大連, 1984。

—本文作者任教於廣州華南師範大學數學系—