Riemann-Lebesgue引理與弱收斂

林琦焜

前言:

我們在這篇文章將從 Riemann - Lebesgue 引理談起, 這在近代分析中扮演了極重要之角色。而後談與它相關的主題包括有固定相法(method of stationary phase)與弱收斂特別是 Young's測度之概念。

Riemann - Lebesgue 引理之起源應當是 Fourier 級數之收斂性問題與 Fourier 積分公式, 換句話說就是回到 Fourier 最初利用分離變數法解熱傳導方程, 最後需要研究的逆問題 (inverse problem), 因此可見其重要性。我們將給幾個有直觀意義的證明, 而後談 semi - classical 的概念, 最後則引進弱收斂與 Young's 測度等在近代分析尤其是非線性偏微分方程中極重要的概念。

1. Riemann - Lebesgue 引理

談 Riemann-Lebesgue 引理若不從號稱是"數學中的詩篇"—Fourier 級數著手就不知其原始意義。給定一函數 $f \in C[-\pi,\pi]$ 將之表爲 Fourier 級數

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x+b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}\xi d\xi \\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\sin\frac{n\pi}{L}\xi d\xi \end{cases} \tag{1.2}$$

利用三角函數的和差化積則上式可表爲

$$\begin{aligned} f(x) = {}& \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi)d\xi \end{aligned} \tag{1.3}$$

我們現在感興趣的問題是: 取 x 固定而令 $L \to \infty$ 則 (1.3) 式會成爲什麼呢? 當然爲了保證積分的存在性, 我們首先假設 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(\xi) | d\xi < \infty \tag{1.4}$$

因此 (1.3) 式成爲 (此時$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi \to 0$)

$$\begin{aligned} f(x) = {}& \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L} \\ &\cdot\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi)d\xi \end{aligned} \tag{1.5}$$

現在模仿 Riemann 和的方法令

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \Delta\lambda = \lambda_{n+1}-\lambda_n = \frac{\pi}{L}$$

$$I(\lambda, L) = \int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \tag{1.6}$$

因此 (1.5) 式可改寫爲

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} I(\lambda_n, L)\Delta\lambda \tag{1.7}$$

這正是 Riemann 和之形式。令$\Delta\lambda \to 0$ $(L\to\infty)$ 則

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty I(\lambda,L)d\lambda\\&=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-L}^{L}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \quad (1.8)\end{aligned}$$

這個就是出名的Fourier積分公式。再利用和差化積將 (1.8) 式改寫爲

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda\end{aligned}\quad(1.9)$$

其中

$$\begin{cases}a(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\\ b(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\end{cases}\quad(1.10)$$

這正是 Fourier 餘弦 (正弦) 變換 其實就是 Fourier 級數之推廣。當然我們可利用 Euler 公式將兩者合併在一起

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}d\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \quad (1.11)\end{aligned}$$

其中

$$\hat f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \quad (1.12)$$

就是函數 f 之 Fourier 變換。因此 Fourier 積分公式之本質就是一種逆變換 — Fourier 逆變換而這正是解偏微分方程, 特別是線性常係數偏微分方程最重要的工具。

上面這些推導過程中有個共同的現象就是都出現底下類型之積分

$$\int_a^b f(x)\begin{pmatrix}\cos nx\\ \sin nx\end{pmatrix}dx,$$

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \qquad a.b\in\mathbb{R}$$

因此嚴格的證明之前須先討論這類型積分的性質, 這就是 Riemenn - Lebesgue 引理:

Riemann - Lebesgue 引理:

型式 I:(有界區間)

若 $f\in L^1([0,2\pi])$ 則

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx\\=&\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx=0\end{aligned}$$

或表爲複數之形式

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\pm\infty}\hat f(n)\\=&\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx=0\end{aligned}\quad(1.13)$$

型式 II:(無界區間)若$f\in L^1(\mathbb{R})$ 則

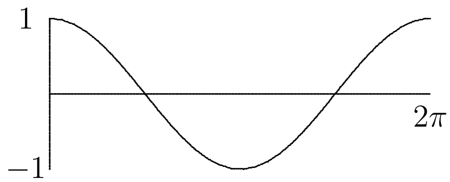
$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\pm\infty}\hat f(\lambda)\\=&\lim_{\lambda\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=0\end{aligned}\quad(1.14)$$

由積分之連續性我們更可結論

$$f\in L^1(\mathbb{R})\Rightarrow\hat f\in C_0(\mathbb{R}) \quad (1.15)$$

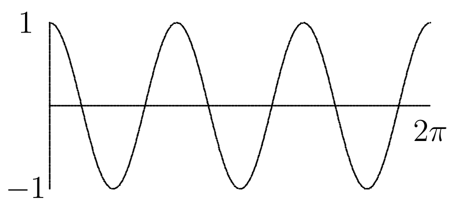
$C_0(\mathbb{R})$: 表示所有連續函數滿足在無窮點爲 0 之集合。

關於 Riemann - Lebesgue 引理最早是由 Riemann 於 1876 年證明, 而一般的情形即 $f \in L^1$ 則是由 Lebesgue 於 1903 年所給的。關於這定理的證明有許多種, 但我們並無意以這種方式對待這美麗且重要之定理。因爲函數 f 之範圍太廣 (至少連續) 所以要分析的不是這項而是 $\cos nx$, 爲什麼呢? 我們看看其圖形, 從幾何的角度來明白其意義



$\cos x$　(1個波)

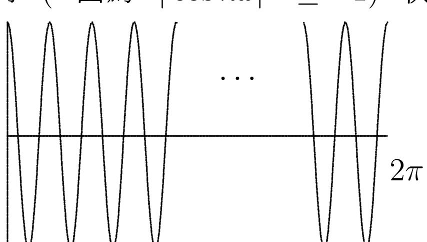
圖 一



$\cos 3x$　(3個波)

圖 二

由圖形可知 $\cos nx$ 爲 n 個餘弦波擠在 $[0, 2\pi]$ 這個區間, 因此當 $n \to \infty$ 時可想像的是 $\cos nx$ 在 1 與 -1 之間 (因爲 $|\cos nx| \leq 1$) 快速振盪。



$\cos nx$(n 個波)

而關於其積分$\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$, 則因爲 $\cos x$ 爲一週期 2π 的函數, 其積分有一部份在 x 軸之上方, 另一部份則在 x 軸之下方。這兩部份一正一負互相抵消, 因此 $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$。同理對函數 $\cos nx$一正一負只是現在跳得密一些, 彼此互相抵消, 故 $\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$。"0"這個值是有意思的, 它就是 $\cos x$ 的平均值

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$$

從圖形上來看 $\cos nx$ 這些函數以 x 軸爲中心而上下振盪, 故其積分即平均值爲0, 同理對於積分

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

之討論與前面完全相同, 唯一差別的是振幅改變爲 $|f(x)|$ (原先是1)。

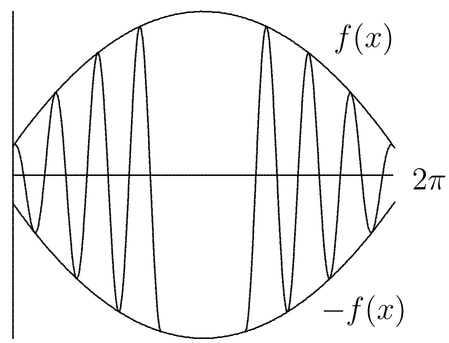


圖 三

此時積分 $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ 不見得要爲 0。但當 $n \to \infty$ 時正的與負的部份幾乎彼此抵消, 因此合理的猜測是

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

如果 $\cos x$ 代換爲 $\sin x$, 也有相同的結果

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

這就是 Riemann - Lebesgue 引理。

定理證明:

關於此定理的證明有幾種方法都有其價值。我們將分別列出並說明其在數學思維上的重要性。

(1) Riemann 和:

在前面的討論中我們已經知道在區間 $[0,2\pi]$, $\cos nx$ 由 n 個餘弦波所組成, 因此我們將 $[0,2\pi]$ 分成 n 等分 (這個概念就是 Riemann 和)

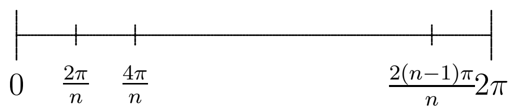


圖 四

$$\int_0^{2\pi} \to \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2(k-1)}{n}\pi}^{\frac{2k}{n}\pi} \tag{1.16}$$

因此積分可表爲

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&=\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2(k-1)}{n}\pi}^{\frac{2k}{n}\pi} f(x)\cos nx dx \\
&=\sum_{k=1}^{n} \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} f(\frac{y}{n})(\cos y)\frac{1}{n}dy \\
&\qquad (x=\frac{y}{n}) \\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} f\frac{(\xi+2(k-1)\pi}{n})\cos\xi d\xi \\
&\qquad (y=\xi+2(k-1)\pi) \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\xi \\
&\quad \cdot(\sum_{k=1}^{n} f(\frac{\xi+2(k-1)\pi}{n}).\frac{2\pi}{n})d\xi
\end{aligned}$$

但 f 爲連續函數, 其 Riemann 滿足

$$\sum_{k=1}^{n} f(\frac{\xi+2(k-1)\pi}{n})\frac{2\pi}{n}$$

$$\to \int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad n\to\infty$$

故知

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&\to (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\xi d\xi)(\int_0^{2\pi} f(x)dx) \\
&=0
\end{aligned} \tag{1.17}$$

在證明的過程中可以確定的是積分的極限值等於零並非必然的 (常常我們會這麼猜), 而是因 爲 $\cos\xi$ 之平均値 (mean) 爲零的緣故。如果以 $\cos^2 x$ 代替 $\cos x$ 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2 nx dx \\
&\to (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\xi d\xi)(\int_0^{2\pi} f(x)dx) \\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)dx
\end{aligned} \tag{1.18}$$

當然也可利用定理的結果來證明

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2 nx dx \\
&=\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1+\cos 2nx}{2}dx \\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2nx dx
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)dx+0=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

我們發現一件有趣的事實:

$$\begin{aligned}
&(\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx)^2 \\
&\neq \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos^2 nx dx
\end{aligned} \tag{1.19}$$

我們在最後一節再利用弱收斂 (weak convergence) 的觀念來談此現象。

在上述的證明過程中, 我們僅用到 $\cos x$ 爲一週期爲 2π 的函數, 因此可直接推廣至任意週期同爲 2π 的連續函數 $g(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)dx = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx\Big)\Big(\int_0^{2\pi} f(x)dx\Big) \quad (1.20)$$

此時 $\cos x$ 由 $g(x)$ 取代; $\cos nx$ 則由 $g(nx)\equiv g_n(x)$ 取代

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)g_n(x)dx\\ &=\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)dx\\ &=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2(k-1)}{n}\pi}^{\frac{2k}{n}\pi} f(x)g(nx)dx\\ &=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(\frac{\xi+2(k-1)\pi}{n})g(\xi)d\xi\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\xi)(\sum_{k=1}^{n} f(\frac{\xi+2(k-1)\pi}{n})\frac{2\pi}{n})d\xi\\ &\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\xi)d\xi\cdot\int_0^{2\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

(2) Weierstrass 逼近定理:

這個定理告訴我們“定義在緊緻區間的連續函數差不多就是多項式函數”, 因此我們可以先試試

$$f(x)=x^k \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} x^k\cos nx dx\\ &=\frac{1}{n}(x^k\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi} kx^{k-1}\sin nx dx\\ &=-\frac{k}{n}\int_0^{2\pi} x^{k-1}\sin nx dx\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}&|\int_0^{2\pi} x^k\cos nx dx|\\ &\le\frac{2k}{n}(2\pi)^{k-1}\to 0 \quad 當 n\to\infty\end{aligned}$$

故可得

$$\int_0^{2\pi} x^k\cos nx dx\to 0 \quad 當 n\to\infty。$$

對任意的連續函數 $f(x)$, 可取多項式 $P_k(x)$ 來逼近

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)-P_k(x)|\to 0 \quad k\to\infty$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx\\ &=\int_0^{2\pi}(f(x)-P_k(x))\cos nx dx\\ &\quad+\int_0^{2\pi} P_k(x)\cos nx dx\\ &=\int_0^{2\pi}(f(x)-P_k(x))\cos nx+0\end{aligned}$$

取絕對值

$$\begin{aligned}&|\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx|\\ &\le\int_0^{2\pi}|f(x)-P_k(x)|\,|\cos nx|dx\\ &\le\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)-P_k(x)|\\ &\quad\cdot\int_0^{2\pi}|\cos nx|dx\to 0 \quad 當\ k\to\infty\end{aligned}$$

這個證明方法不像第一個證明方法那麼基本也不容易看出, 若 $\cos x$ 取代爲任意週期爲 2π 的連續 $g(x)$ 其極限值爲何? 但卻把數學中分析 (analysis) 的技巧—逼近 (density) 的概念表達地相當淸楚。在實變函數中

有對等的概念:

特徵函數
(characteristic function)
$\Downarrow$
單純函數
(simple function)
$\Downarrow$
可測函數
(measurable function)
$\Downarrow$
可積函數
(integrable function)

我們就留給讀者去思考。

(3) Fourier 級數:

我們將 f 展開為 Fourier 級數 (可以先假設 f 為一週期函數而且 f 之 Fourier 級數收斂)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.21}$$

兩邊同時乘 $\cos nx$ 而後積分並利用三角函數的正交性得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

但級數收斂, 因此

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \to 0 \quad n \to \infty$$

若 $\cos x$ 換為任意週期 2π 之函數 $g(x)$ 一樣利用 Fourier 級數

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx$$

$$g(nx) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jnx + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jnx$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x) g(nx) dx \\ &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j c_{jn} + b_j d_{jn})\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} c_{jn} = \int_0^{2\pi} f(x)\cos jnx dx \\ d_{jn} = \int_0^{2\pi} f(x)\sin jnx dx \end{cases}$$

利用 Cauchy - Schwartz 不等式知

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_j c_{jn}\Big| \le (\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{\infty} c_{jn}^2)^{\frac{1}{2}}$$

但

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{jn}^2 \le \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \to 0 \quad 當\ n \to \infty$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j c_{jn} \to 0 \quad 當\ n \to \infty$$

同理可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j d_{jn} \to 0 \quad 當\ n \to \infty$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x) g_n(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\frac{a_0}{2} dx \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) dx\Big)\Big(\int_0^{2\pi} f(x) dx\Big)\end{aligned} \tag{1.22}$$

換句話說 (用弱收斂的語言)

$$g_n(\cdot) \to \overline{g}(\cdot),$$
$$\overline{g} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(4) 無界區間:

因爲 Fourier 積分爲一致收斂且 $e^{-i\lambda x}$ 爲連續, 因此可得 $\hat{f}(\lambda)$ 對 λ 而言是一致連續, 若 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 則由 Parseval 定理知

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$$

但 $\hat{f}(\lambda)$ 爲一致連續, 故可結論

$$\hat{f}(\lambda) \to 0 \quad 當 \quad \lambda \to \pm\infty$$

如果 $f \notin L^2(\mathbb{R})$, 我們可以考慮 f 之切平函數 (truncated function)

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \le n \\ 0 & |f(x)| > n \end{cases}$$

則

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx \le n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx \le n \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

故 $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, 因此由前面之結果知

$$\hat{f}_n(\lambda) \to 0 \quad 當 \ \lambda \to \pm\infty$$

但由切平函數之定義知

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)| dx \to 0, \quad 當 \ n \to \infty。$$

所以

$$|\hat{f}(\lambda) - \hat{f}_n(\lambda)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f_n(x)) e^{-i\lambda x} dx \Big| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)| dx \to 0。$$

因此若取 $|\lambda|$ 相當大使得 $|\hat{f}_n(\lambda)| \to 0$, 則

$$|\hat{f}(\lambda)| \to 0 \quad 當 \ |\lambda| \to \infty$$

註: 由 Fourier 級數的觀點而言, Riemann - Lebesgue 引理實際上就是函數 f 之第 n 項 Fourier 係數。但 Fourier 級數並沒有限定是由 $\cos nx$, $\sin nx$, e^{inx} 等所組成。由 Sturm-Liouville 問題而看只要是一組正交函數 (orthogonal functions) 即可

$$u'' + \lambda u = 0 \leftrightarrow \{e^{i\lambda_n x}\}$$

$$[pu']' + [\lambda\rho(x) - q(x)]u = 0 \leftrightarrow \{\varphi_n(x)\}$$

因此可猜測的是此時的 Riemann-Lebesgue 引理爲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{< f, \varphi_n >}{\sqrt{< \varphi_n, \varphi_n >}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b f\varphi_n \rho dx}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2 \rho dx}} = 0 \quad (1.23)$$

2. 固定相法 (method of stationary phase)

在討論波的相散 (dispersion) 問題時, 我們常常要研究底下之積分

$$I(a, b, \lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx, \lambda \gg 1 \quad (2.1)$$

這積分在聲學 (Acoustics) , 幾何光學 (Geometric Optics) 的曝光率也極高。Riemann- Lebesgue 引理提供了這積分的巨觀行爲 (macroscopic behavoir)。但要

瞭解聲音與光波之傳遞則須對其變動 (fluctuation) 或微觀行為 (microscopic behavior) 有更深刻之認識, 而這就有賴於固定相法 (method of stationary phase)。

回憶一下尤拉公式 (Euler formula)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

因此我們可先討論積分 $I(a,b,\lambda)$ 之實部

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}I(a,b,\lambda)\\ &= \int_a^b f(x)\cos(\lambda g(x))dx, \lambda \gg 1 \qquad (2.2)\end{aligned}$$

這積分實際上就是 Riemann - Lebesgue 引理之推廣

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx \leftrightarrow \int_a^b f(x)\cos\lambda g(x) dx$$

原先是單位函數 $I(x) = x$, 現在則換為 $g(x)$, 但基本上 $\cos\lambda g(x)$ 仍然是 $\cos\lambda x$ 之形式。因此若函數 f 之改變量遠小於 $\cos(\lambda g(x))$ 的話 (如圖所示)

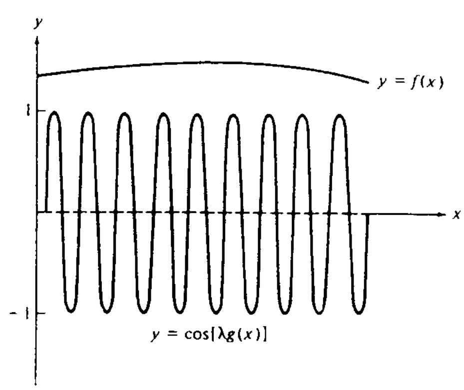


圖 五

則誠如在 Riemann-Lebesgue 引理中所討論, 函數 $\cos\lambda g(x)$ 正的部份與負的部份彼此平衡互相抵消, 因此這部份對積分 $\mathrm{Re}I(a,b,\lambda)$ 而言可說沒有影響, 唯一要考慮的是滿足 $\frac{d}{dx}\cos\lambda g(x) = 0$ 的那些點 x, 因為此時並不產生振盪 (oscillation) 也就沒有抵消 (cancellation) 作用 (因為 $\cos\lambda g(x)$ 此時為常數)

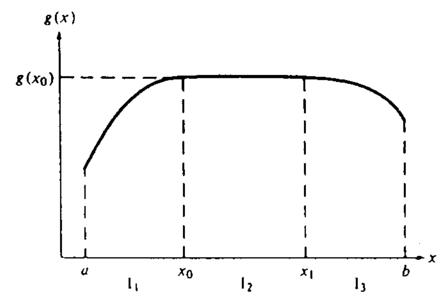


圖 六

由於此原因我們稱滿足 $g'(x_i) = 0$ 的點 x_i 為固定點 (point of stationary phase), 就是當 λ 相當大 時對積分有貢獻的點。

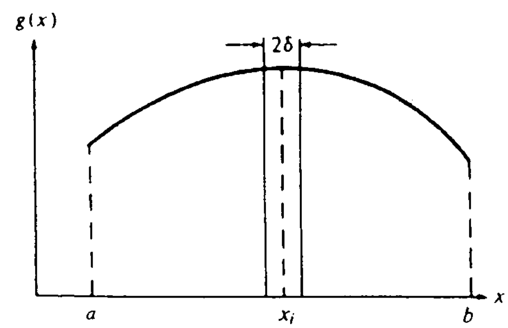


圖 七

(1) $g'(x) \neq 0, \quad \alpha < x < \beta$

$$\begin{aligned}I(\alpha,\beta,\lambda) &= \int_\alpha^\beta f(x)\exp[i\lambda g(x)]dx\\ &= \int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{i\lambda g'(x)} d[e^{i\lambda g(x)}]\end{aligned}$$

由分部積分得

$$i\lambda I(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{f}{g'}\exp(i\lambda g)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{f'g'-fg''}{(g')^2}\exp(i\lambda g)dx$$

利用三角不等式

$$|x+y|\le|x|+|y|,$$
$$|\int_\alpha^\beta F(x)dx|\le\int_\alpha^\beta|F(x)|dx$$

知

$$\Big|\lambda I(\alpha,\beta,\lambda)\Big| \le\Big|\frac{f(\beta)}{g'(\beta)}\Big|+\Big|\frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}\Big|+\int_\alpha^\beta\Big|\frac{f'g'-fg''}{(g')^2}\Big|dx$$

因此可結論

$$\int_\alpha^\beta f(x)\exp[i\lambda g(x)]dx=O(\frac{1}{\lambda}),\lambda\gg 1 \tag{2.3}$$

這是沒有固定相點 (point of stationary phase) 時之結果, 其次我們討論有固定相點之情形, 當然還是從一個點開始:

(2) $g'(x_i)=0,\quad g''(x_i)\ne 0$

由連續性我們僅須考慮區間$[x_i-\delta,x_i+\delta]$

$$I_i=\int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta}f(x)\exp[i\lambda g(x)]dx$$

藉由 Taylor 展開式知

$$\begin{aligned}I_i&\approx\int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta}f(x)\\&\quad\cdot\exp\{i\lambda[g(x_i)+\frac{1}{2}g''(x_i)(x-x_i)^2\}dx\\&=2f(x_i)\exp[i\lambda g(x_i)]\\&\quad\cdot\int_{x_i}^{x_i+\delta}\exp[i\lambda A(x-x_i)^2]dx\end{aligned}$$

其中 $A=\frac{1}{2}g''(x_i)>0$ 現在考慮變數變換

$$\lambda A(x-x_i)^2=\xi^2$$

則上式之積分為

$$\int_{x_i}^{x_i+\delta}\exp[i\lambda A(x-x_i)^2]dx=\frac{1}{\sqrt{\lambda A}}\int_0^{\sqrt{\lambda A}\delta}\exp i\xi^2 d\xi$$

這積分就是出名的 Fresnel 積分

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\exp(i\xi^2)d\xi\\&=\int_0^\infty\cos\xi^2d\xi+i\int_0^\infty\sin\xi^2d\xi\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)\end{aligned}\tag{2.4}$$

因此可結論

$$\begin{aligned}I_i&\approx 2f(x_i)\exp[i\lambda g(x_i)]\frac{1}{\sqrt{\lambda A}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}\\&=(\frac{2\pi}{\lambda g''(x_i)})^{\frac{1}{2}}e^{i\lambda g(x_i)}e^{i\frac{\pi}{4}}f(x_i)\end{aligned}$$

如果 $g''(x_i)<0$ 上式亦真, 僅差個符號

$$I_i\approx(\frac{2\pi}{\lambda|g''(x_i)|})^{\frac{1}{2}}e^{i\lambda g(x_i)}e^{-i\frac{\pi}{4}}f(x_i)$$

這是一個點的情形; 一般則為

$$\begin{aligned}&I(a,b,\lambda)\\&=\int_a^b f(x)e^{i\lambda g(x)}dx\\&=\sum_{j:g''(x_j)>0}[\frac{2\pi}{\lambda g''(x_j)}]^{\frac{1}{2}}e^{i\lambda g(x_j)}e^{i\frac{\pi}{4}}f(x_j)\\&\quad+\sum_{j:g''(x_j)<0}[\frac{2\pi}{\lambda|g''(x_j)|}]^{\frac{1}{2}}e^{i\lambda g(x_j)}\\&\quad\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}f(x_j)+O(\frac{1}{\lambda})\end{aligned}\tag{2.5}$$

這就是 (method of stationary phase), 它告訴我們積分 $I(a,b,\lambda)$ 對 λ 取漸近展開

式, 其第一項主要是受固定相點 (stationary point) 所影響。

對於 n 重積分我們也有相同的結果:

$$g''(x_0)(\text{二次微分})$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0) \quad (\text{Hessian 矩陣})$$

$$\begin{aligned} I(\lambda) \equiv & \int \cdots \int f(x) e^{i\lambda g(x)} dx_1 \cdots dx_n \\ & \sim (\frac{2\pi}{\lambda})^{\frac{n}{2}} \left| \det \frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial x^2} \right|^{-\frac{1}{2}} f(x_0) \\ & \cdot \exp[i\lambda g(x_0) + \frac{i\pi}{4} \mathrm{sgn} \frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial x^2}] \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$\mathrm{sgn}\, x \equiv \frac{x}{|x|}$$

且

$$\frac{\partial g(x_0)}{\partial x} = 0, \quad \det(\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial^2 x^2}) \neq 0。$$

這個結果可應用到Feynman 路徑積分 (Feynman path integral), 因此我們可以說 Riemann - Lebesgue 引理也提供了 Feynman 路徑積分之最原始形式, 此時參數 λ 換為普朗克常數 (Plank constant) $\hbar$ 。研究當 $\hbar \to 0$ 時量子力學與古典力學之關係。這就是所謂"semi-classical limit"。

3. 弱收斂 — 收斂觀念的提昇

在第一節關於 Riemann - Lebesgue 引理中, 知顯然函數數列 $\{\cos nx\}$ 或 $\{\sin nx\}(g_n(x) = g(nx))$ 之極限並不存在, 其原因就是近代分析中所研究的主題之一 — 振盪 (oscillation)。而 Riemann - Lebesgue 引理則提供了研究此一主題的第一個工具, 同時也告訴我們這些函數 $(\cos nx)$ 之收斂要有意義則必須藉助於積分, 這正是弱收斂 (weak convergence) 的原始意義。而其極限則稱爲弱極限 (weak limit)。例如:

$$\begin{aligned} \cos nx & \overset{w}{\rightharpoonup} 0 \\ \sin nx & \overset{w}{\rightharpoonup} 0 \\ g_n(x) & = g(nx) \\ \overset{w}{\rightharpoonup} \overline{q} & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx \\ & \equiv w - \lim g_n(\cdot) \end{aligned} \tag{3.1}$$

一般而言

$$g_n(\cdot) \overset{w}{\rightharpoonup} \overline{g} \qquad g_n^2(\cdot) \overset{w}{\not\rightharpoonup} (\overline{g})^2$$

這告訴我們弱收斂的限制與困難

$$w - \lim_{n\to\infty} (q_n(\cdot))^2 \neq (w - \lim q_n(\cdot))^2 \tag{3.2}$$

尤其在非線性之問題。可以猜測的到是

$$(w - \lim g_n(\cdot))^2 \leq w - \lim (g_n)(.))^2 \tag{3.3}$$

我們將問題表爲更廣義:

$$g_n(\cdot) \overset{w}{\rightharpoonup} \overline{g} \Rightarrow F(g_n) \overset{w}{\rightharpoonup} F(\overline{g}) \tag{3.4}$$

F 爲任意函數。關於這問題有比較完整的數學理論就作者所知就是— compensated compactness 方法。這是利用 Young's 測度來描述振盪 (oscillation) 而其起源就是 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\cos nx \overset{w}{\rightharpoonup} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx$$

我們作一下變數變換 $(\lambda=\cos x)$ 可得

$$\cos nx \overset{w}{\rightharpoonup} \int_{-1}^{1} \lambda \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda \equiv <\lambda, \nu(x)> \tag{3.5}$$

而 $\nu(x)$ 就是 Young's 測度。由被積分函數爲一奇函數因此顯然

$$\cos nx \overset{w}{\rightharpoonup} \int_{-1}^{1} \lambda \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = 0 \tag{3.6}$$

但 Young's 測度告訴我們的更多於此

$$\cos^2 nx \overset{w}{\rightharpoonup} \int_{-1}^{1} \lambda^2 \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = <\lambda^2, \nu(x)> \tag{3.7}$$

依此類推

$$\cos^k nx \overset{w}{\rightharpoonup} \int_{-1}^{1} \lambda^k \frac{1}{\pi\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = <\lambda^k, \nu(\lambda)> \tag{3.8}$$

既然多項式都成立了, 那麼可期待的是對於任意的連續函數 $f(x)$ 應有

$$f(\cos nx) \overset{w}{\rightharpoonup} <f(\lambda), \nu(\lambda)> \tag{3.9}$$

同理對任意弱收斂序列 $\{g_n\}$ 也有相同之結果

$$f(g_n) \overset{w}{\rightharpoonup} <f(\lambda), \nu(\lambda)> \tag{3.10}$$

當然此時之 Young's 測度 $\nu(\lambda)$ 是隨 $\{g_n\}$ 而定的。這就是 Young's 測度的基本定理 (fundamental theorem of Young's measure)。

定理: 令 $K\subset\mathbb{R}^m, \Omega\subset\mathbb{R}^n$ 爲有界之開集合, 而且

$$u^\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

爲可測函數族且滿足 $u^\epsilon(y)\in K$ a.e. 則存在一族機率測度 (probability measure) $\nu_y\in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^m)$, $y\in\Omega$ 使得

$$\mathrm{supp}\nu_y \subset \overline{K}, \qquad y\in\Omega$$

且對任意連續函數 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, 始終存在子數列 u^ϵ 滿足

$$w^* - \lim f(u^\epsilon) = <f(\lambda), \nu_y(\lambda)> \equiv \int f(\lambda) d\nu_y(\lambda) \tag{3.11}$$

關於此定理之證明請參考 [1] [3] [4], 我們將在另外著文探討 Young's 測度與補償緊緻法 (compensated compactness method) 及其應用。該定理實際上就是一種表現定理 (representation theorem) 告訴我們利用 Young's 測度與函數 f 表示出來。而且也克服了非線性項的弱收斂問題, 也因此爲何這定理在非線性分析中扮演著重要角色。順便值得一提的是 Young's 測度更是研究 Homogenization(均勻化) 的重要工具。透過這些問題的研究, 讓我們更淸楚在古典分析 (classical analystic) 中所忽略的奇異部份(singular part) 實際上是重要的, 而不能那麼獨斷地說“幾乎處處爲零”。我們將在未來的文章中討論 Young 測度, H-測度還有他們在非線性方程與 Homogenization 上之應用。

參考資料

1. G.-Q. Chen, *The compensated compactness method and the system of isentropic gas dynamics*, Preprint MSRI-00527-91 Mathematical Science Research Institute, Berkeley (1990).

2. Bernard Dacorogna, *Weak continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functions.* LNM, 922. Springer-Verlag, 1982.
3. L. C. Evans, *Weak Convergence methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 74, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1990).
4. P. Gerard, *Microlocal Defect measures*, Commun. in Partial Differential Equations, 16, 1991(1761-1794)
5. M. A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Application*, 2nd Ed., McGraw-Hill 1991.
6. M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian System*, Springer-Verlag(1990).
7. L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations, Heriot-Watt Symposium*, IV, (ed. R. J. KNOPS), Pitman, New York, (136-211) 1979.
8. L. Tartar, *H-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 115A, 1990 (193-230)。

—本文作者任教於國立成功大學數學系—

八十五年度中央研究院
周鴻經獎學金得獎名單

羅主斌 (台大數研所)	李明憶 (中央大學)
張毓麟 (師範大學)	楊富堯 (中正大學)
李盈盈 (中山應數所)	楊淸富 (中山應數所)
陳怡眞 (政治大學)	洪慶良 (政大應數所)
何忠益 (淸華大學)	林曉潡 (高師大)
陳建州 (成大應數所)	王俊超 (淡江大學)

附註:「中央研究院周鴻經獎學金」申請資格及辦法請參見本刊封底裡頁「中央研究院周鴻經獎學金章程」。