從韓信點兵和勾股弦說起——漫談基礎數學的古今中外

(本文主要內容作者曾經在香港大學及國立中央大學公開演講)

項武義

基礎數學的範疇, 大體上也就是現代中學和大一數學課程中所要學的代數、幾何與分析的基礎知識; 它不但是數學的根本, 也是整個科技發展的基礎, 可以說是人類理性文明之中的至簡至精的一部份。基礎數學的進化歷程, 乃是中西文明發展史中的重大篇章。由此可見, 我們今天所要談論的題目, 即使是漫談也只能擇其精要, 長話短說, 也許可以提綱挈領地略述其梗概, 整理出其中幾條主線來。現在且讓我們就以中國古算中兩個輝煌成就: *韓信點兵與勾股弦*分別作爲代數與幾何逐步演進的線頭, 來分析一下其中發展的脈絡。

I. 韓信點兵:

相傳的韓信點兵法又叫做孫子算法, 例如: 在廣場中有士兵約壹千左右, 若令其分別以7人,11人,13人一組自行組合, 設其餘額分別爲1人,5人, 8人試求其確切人數。

韓信點兵的基本想法是分解組合, 亦即把上述由給定餘數反求原數的問題歸於下述三個簡化的特例來求解, 即餘數之中只有一個爲 1 其他皆爲 0 的簡單而且基本的情形。以上述點兵問題爲例, 則是先求解下列之 x_1, x_2, x_3; 而所求之 x 和 $x_1+5x_2+8x_3$ 只差一個 1001 的倍數, 即 x_1, x_2, x_3 和 x 分別以7,11,13除之的餘數如下表所列:

	7	11	13
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
x_3	0	0	1
x	1	5	8

因爲 x_1 被11,13整除, 所以它是143的倍數, 即 $x_1=143y_1$, 再者 $143y_1$ 和 $3y_1$ 被7除的餘數顯然相同, 由此易見 $y_1=5$; x_2, x_3 的求

法同此。

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 143y_1 \\ x_2 = 91y_2 \\ x_3 = 77y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow x \equiv x_1 + 5x_2 + 8x_3 (1001)$$

由上述 x_1, x_2, x_3 之解即可看出 $x = 918$。上述算法當然可以直接推廣到由分別對於 k 個互素的除數的給定餘數反求原數, 這種剩餘問題, 即

	n_1	n_2	$\cdots$	n_k
x_1	1	0	$\cdots$	0
x_2	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_k	0	0	$\cdots$	1
x	r_1	r_2	$\cdots$	r_k

(n_i互素)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = n_2 \cdots n_k y_1 \\ x_2 = n_1 n_3 \cdots n_k y_2 \\ \cdots \\ x_k = n_1 \cdots n_{k-1} y_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \equiv \sum r_i x_i (n_1 \cdots n_k)$$

這也就是在數論中的中國剩餘定理 (Chinese Remainder Thearem)。其實, 它不僅僅是數論中的一個重要定理, 數學中有好多重要的公式與解法, 根本都是韓信點兵的直接推廣, 例如:

多項式的插值公式:一個多項式 $f(x)$ 被 $(x-a)$ 除的餘式就是 $f(a)$, 多項式函數的一個基本性質是一個 n 次多項式 $f(x)$ 被它在 $n+1$ 個點的值所唯一決定。多項式的插值問題也就是要由一個 n 次多項式 $f(x)$ 在給定 $n+1$ 個點 $\{a_i; 0 \leq i \leq n\}$ 的函數值, 亦即從 $\{b_i = f(a_i); 0 \leq i \leq n\}$ 去反求由上述兩組 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 所唯一確定的多項式。將上述插值問題和韓信點兵的剩餘問題兩相比較, 不難看出, 只要把數改成式, 除數改成除式 $(x - a_i)$, 則餘式就是 $f(a_i) = b_i$ 所以前者就是後者在多項式除法上的直接推廣。同樣地把韓信點兵的基本想法用到插值問題上, 即有

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
$f_0(x)$	1	0	0	$\cdots$	0
$f_1(x)$	0	1	0	$\cdots$	0
$f_2(x)$	0	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$f_n(x)$	0	0	0	$\cdots$	1
$f(x)$	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_n

則有: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$。

再者, 由餘式定理的推論可得 $f_0(x)$ 必然是 $\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)$ 的倍式 [因爲 $(f(a_j) = 0, 1 \leq j \leq n]$ 由此易見

$$f_0(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j) \Big/ \prod_{j=1}^{n}(a_0 - a_j)$$

[這樣使得 $f_0(a_0) = 1$]。

同理可得

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - a_j) \Big/ \prod_{j \neq i}(a_i - a_j)$$

所以韓信點兵在多項式的框架中的直接推廣也就是代數中的 Lagrange 插值公式。

在我們進一步探討“韓信點兵”的其他推廣及其深遠影響之前, 且讓我們先來分析一

下, 它這種分解組合的想法的數理內含何在? 歸根究底, 整數的乘法乃是由加法的濃縮而得的; 例如 $5 \cdot a$ 其實就是 5 個 a 相加的總和, 由此可見, 下述分配律

$$n \cdot a+m \cdot a=(n+m) \cdot a$$

其實也就是簡明扼要的總結了加與乘之間的起承關係的特徵性質!而分配律就是韓信點兵的數理依據。在數學發展史上, 韓信點兵開創了如何運用分配律來達成分解組合, 從而簡明扼要地解決各種各樣的線性問題(linear problems) 的先河與典範! 因爲這種分解組合的方法的用途是如此廣泛, 而用它來解決線性問題又特別簡潔有力, 把它加以抽象化, 系統化, 所發展而成的一門基礎數學也就是目下所稱之爲線性代數 (Linear Algelra) 者, 究其本質, 線性代數就是分配律的代數,而韓信點兵則是線性代數的基本方法的起始源頭, 例如線性方程組, 線性微分方程等等, 都是這種分解組合的基本想法的直接推廣, 眞可以說是洋洋灑灑, 多彩多姿, 不勝枚舉。

今天限於時間, 暫且打住, 讓我們改弦更張, 來談談中國古算中的幾何。

II. 勾股弦與出入相補:

我們在史藉上讀到大禹治水, 以及春秋、戰國、秦、漢的種種大型水利工程, 如今河山變遷, 碩果僅存者首推都江堰, 它兩千多年來依然故我, 一直在造福著成都平原上的世世代代, 任何人到了都江堰都情不自禁地驚嘆中國古代工程師們卓越的智慧與匠心, 令人神往。我們接著要談一談的中國古算中的測量原理, 也就是他們在實踐中體會總結而得者。也許當年很可能是以一套測量技術的形式世代流傳於工匠之間, 其實它們已經是一整套精簡扼要的“定量平面幾何的基礎理論”

話說當年, 他們以長方形面積等於長乘寬這個基本公式爲起點, 運用簡單的割補, 推算而得平行四邊形和三角形的面積公式, 然後再用分割和出入相補去推算出下述兩個平面測量上的基本公式, 即

(1) 勾股弦公式:勾方加股方等於弦方 $(a^2 + b^2 = c^2)$

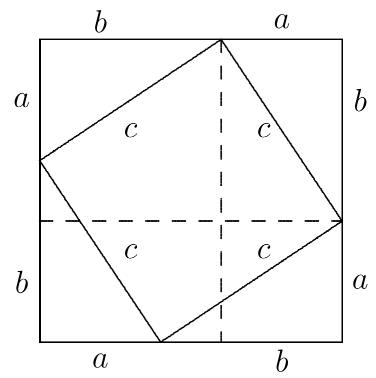

圖 一

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ &= c^2+4(\frac{1}{2}ab)\\ \Rightarrow \quad a^2+b^2 &= c^2\end{aligned}$$

[由實線、虛線所示的兩種分割計算 $(a+b)$ 的平方]

(2) 出入相補:如圖二所示, 在一個任給矩形的對角線上任取一點 p, 它把過該點的水平線和垂直線分別分爲 l, l' 和 h, h' ; 再者由面

積的出入相補, 即可看出圖二之中兩個斜線所示的矩形面積相等, 即得下述基本比例式:

$$\begin{aligned} & h\cdot l'=h'\cdot l \\ \Rightarrow & \frac{h}{h'}=\frac{l}{l'} \\ \Rightarrow & \frac{h+h'}{h'}=\frac{l+l'}{l'} \end{aligned}$$

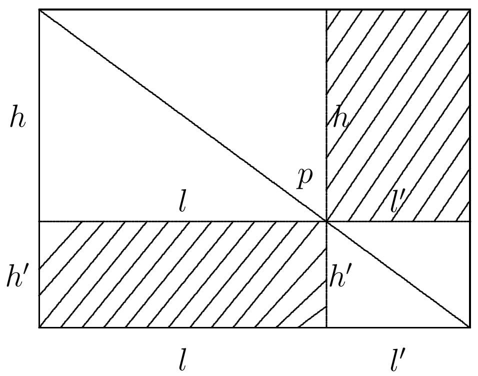

圖 二

勾股弦這個直角三角形三邊之間的基本公式, 在西方起源於巴比侖, 在 Euclid Elements 中給有兩個證明, 但都不如上述中國古證來得簡潔, 再者, 在"出入相補"的應用時, 通常是將由等面積直接得出的比例式兩邊加 1 而得的 $(h+h'):h'=(l+l'):l'$; 由圖二可見, 這其實就是兩個相似直角三角形的對應直角邊之間的比例式, 由此可見中國古算中的"出入相補"其實也就是"相似三角形定理"在直角三角形的特例。驟看起來, 前者似乎只是後者的一個特例, 其實, 任何一對相似三角形都可以用垂線分割成兩對相似的直角三角形的組合, 所以用出入相補加上勾股弦去推導一般的相似三角形定理, 只是這麼簡簡單單的一步, 這也就是在中國古算中用勾股弦和出入相補去解答各種各樣測量問題, 皆能無往不利的道理。

將中西古文明中定量平面幾何兩相對比, 在本質上都自然而然地發現了勾股弦和相似比例式這兩個基本定理, 可以說是大同小異, 但是在處理方式上卻是各有所長, 是數學史上一次耐人尋味的異途同歸, 為了把這一點解說明白, 讓我們接著談一談古希臘定量幾何基礎理論的進化歷程。

III. 古希臘的幾何基礎論:

話說當年, 古希臘文明繼承了巴比侖和埃及文明, 在東地中海沿岸的諸多城邦蓬勃發展, 在其上層階級中, 不乏好學有識之士, 提倡學術; 而對於幾何學、天文學的研究, 尤爲熱衷, 蔚爲風尚。在整個人類文明發展史上, 是一個難得的黃金時代, 在這裡我們只是擇其精要, 概述其重大者之一二:

(1) 定性平面幾何: 以全等形 (亦即疊合) 和平行爲主題;"三角形的 S.A.S 全等條件"和"三角形內角和恆爲一平角"爲起點, 推導了大量關於全等形和平行性質上的定理。若對它們的論證作一系統分析, 則不難看到其論證的基本工具其實只有兩個, 那就是:

(i) 等腰三角形的諸多特徵性質的轉換使用。

(ii) 平行四邊形的諸多特徵性質的轉換使用。

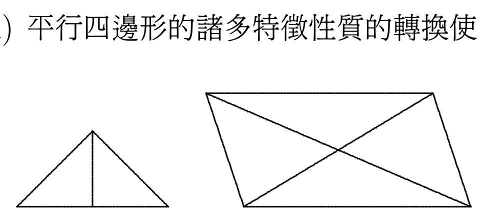

圖 三

長話短說, 前者是運用平面的對稱性的“不二法門”而後者則是利用平行性質的“不二法門”, 而認淸上述兩者業已構成定性平幾的綱要, 則是精簡“定性平幾” 的課程與教學的自然途徑

(2) 由定性平幾邁向定量平幾 (由全等到相似):在定性的研討中, 對於兩個同類的幾何量之間, 只討論其大, 小或相等關係。例如兩個線段, 只問其長短或是否等長? 但是到了定量幾何, 我們就要對於兩個線段確定其長度上的比值來度量其差別。例如 $a:b=\frac{m}{n}$ 或 $a=\frac{m}{n}b$ 與 $na=mb$ 同義。再者, 因爲長度是各種各樣幾何量之中的最最基本者, 所以長度的度量也就自然是定量幾何的起步,在這裡可以看到中、西的古代幾何學者在觀點上的分歧。前者採取實用的觀點而後者則採取理論的觀點。在實用上, 一個給定線段的度量可以用刻有足夠小的分單位的“直尺”逐段丈量, 而很小的餘段則可略去不計, 因爲它業已小於度量過程或實用上需求的準確度了!但是在古希臘的理論探討中, 他們就認識到下述長度度量上的基本問題:

可公度性 (Commensurability) 和長度度量基本問題:若存在有一個公尺度 c 使得兩個給定線段 a,b 恰好都是它的整數倍, 即 $a=mc, b=nc$ 則稱 a,b 爲可公度者,這樣的兩個線段在長度上的比值當然就可以定義爲分數 $\frac{m}{n}$ 。是否任何兩個線段總是可公度的呢?

上述“可公度性是否普遍成立”這個問題的基本重要性可以先從正反兩面來探討其內涵, 若上述問題的答案是肯定的, 則任何兩個線段的長度之比恆爲一分數。反之, 若存在有不可公度的一對對線段, 則它們的長度之比不但不是分數, 而且其確切意義尙有待定義! 古希臘幾何學在這一點上頗費周章, 是經歷了一番挫折與奮鬥才成功的, 直到今日再來回顧這一段史話, 依然是發人深思的。

大約在公元前五、六世紀, 他們先是主觀地把“可公度性的普遍成立” 看成是不證自明的一個“公理”(Axiom), 從而用全等形定理和平行分割, 對於定量幾何中的基本定理如矩形面積公式, 畢氏定理 (亦即勾股弦) 和相似三角形定理等逐一給以嚴格論證, 建立了一個“定量平幾的基本理論”。其中畢氏學派在這方面貢獻良多。

例如下述平行分割就是對於矩形面積公式和相似三角形定理的證明要點:

(i) 矩形面積公式之證明:

設 u 是取定的單位長, 基於“可公度性普遍成立”這個 “公理”, 矩形的長和寬分別都是 u 的分數倍, 亦即 $l=\frac{m}{n}u,\ w=\frac{p}{q}u$ 則 $\square(l,w)$ 和 $\square(u,u)$ 可以分別平行分割成 $m\cdot p$ 和 $n\cdot q$ 個以 $\frac{1}{n}u$和 $\frac{1}{q}u$ 爲邊長的小矩形, 這也就證明了

$\square(l,w):\square(u,u)=\frac{mp}{nq}=(l:u)\times(w:u)$

(ii) 相似三角形定理的證明:

設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三個內角對應相等, 再者由“可公度公理” $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ 是一個分數 $\frac{m}{n}$, 則用下圖所示的平行分割, 可以把它們分割成 m^2 和 n^2 個全等的小三角形, 這樣就可以證明

$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}=\frac{m}{n}$

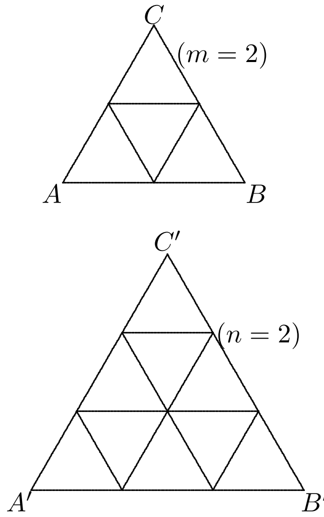

圖 四

(3) 不可公度量的發現:大約在畢氏本人去世後不久, 其門人 Hippasus 一直在鍥而不捨地鑽研 “可公度是否普遍成立? ”這個基本問題。由可公度性的定義, 不難看到兩個可公度的線段 a, b之間, 存在著一個最長的公尺度 c, 而且可以用“*輾轉丈量法*”由 a, b求得 c 。即先以較短者 b 逐段丈量 a, 若恰能整量, 則 b 本身就是所求的最長公尺度, 不然即得一比 b 短的餘段 r_1; 再以 r_1 逐段丈量 b, 若恰能整量, 則 r_1 即爲所求者, 不然則又得一餘段 $r_2 < r_1$; 我們又可以用 r_2 逐段丈量 r_1 如此輾轉丈量, 若 r_k 恰能整量 r_{k-1}, 則 r_k 就是所求者。上述輾轉丈量法求最長公尺度和大家所熟悉的輾轉相除求一對整數的最大公因子是密切相關、相通的, 在當年很可能後者起源於前者。

假如我們對上述求法稍加分析, 就會看到下列兩點: (i) $\{a, b\}$ 是可公度的充要條件就是上述丈量法在有限步即已終止, 反之, 若上述丈量法永無止休, 則 $\{a, b\}$ 就是 不可公度者。(ii) 要注意, 可不可以公度或輾轉丈量是否永無止休都是純理論的問題, 因爲在實用的度量上, 一來誤差是不可避免的, 二來也無法進行無限微小的丈量! 所以我們所討論的乃是純理論境界中的一個問題, 其重要性則在於定量幾何基礎理論的建築上。總之, 可不可公度? 輾轉丈量是否永無止休? 是只有從純理論的論證中去探討的! 是無法由實踐加以檢驗者也!

話說當年, 有一天 Hippasus 在沙盤上對於正五邊形作一番數理分析時發現了一個令他震驚的事實, 那就是一個*正五邊形的對角線長和其邊長是不可公度的*!因爲他的數理分析證明了對於這樣一對線段的輾轉丈量肯定是永無止休的! 他這個石破天驚的發現, 基於下述圖解:

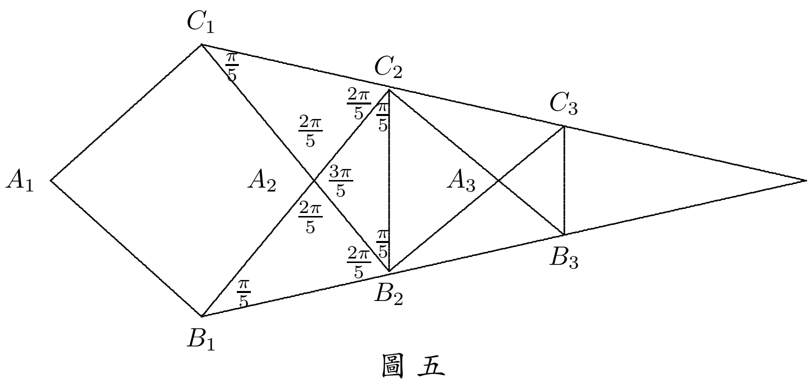

圖 五

如圖五所示, $A_1B_1B_2C_2C_1$ 是一個正五邊形, 只要用當時業已熟知的二點, 即 (i) 三角形內角和恆爲一平角, (ii) 等腰三角形的兩底角相等, 反之亦然, 對於上述圖形加以分析, 即可得出其中所標記的那些角度, 和 $\overline{C_1A_2} = \overline{C_1C_2}, \overline{A_2B_2} = \overline{A_2C_2}$。再者, 若取 B_3, C_3 使得 $\overline{B_2B_3} = \overline{C_2C_3} = \overline{A_2B_2}$ 則不難驗證 $A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一個正五邊形, 而且原來的邊長成爲其對角線長。令 $\{a, b\}$ 分別是原給的正五邊形的對角線長和邊長, r_1 是用 b 丈量 a 所得的餘段, 上圖證明 $\{b, r_1\}$ 就是那個小一號的正五邊形的對角線長和邊長。由此可見, 逐步輾轉丈量下去, 每一次所做的總是用一個正五邊形的邊長丈量其對角線長, 所以當然是永無止休的!(只是那個正五邊形愈來愈小吧了。) 這也就證明了當年認爲不證自明, 用來作爲定量幾何的基本“公理”者, 其實是錯誤的! 不可公度的情形是存在的!

(4) *逼近法和幾何基礎論的重建*:上述 Hippasus 不可公度量的存在性的論證, 我們現在可以把它作爲一個劃時代的發現來欣賞, 它簡潔清新, 引人入勝, 但是對於當年的古希臘幾何學家們, 這簡直是天搖地動的大地震 (Geoquake), 它把他們引以自豪的幾何基礎論震撼得搖搖欲墜, 因爲所有基於“可公度性普遍成立” 這個“公理”的證明都顯然是不完整的了! 其實, 它們只是對於可公度的這種特殊情形的證明。Hippasus 這個驚人的發現, 當年的確使得古希臘的學界, 特別是畢氏學派非常難堪 , 據說當年畢氏學派曾試圖在門人中強制保密; 而 Hippasus 這位學者則實在難以忍受這種抹殺眞理的欺世行爲, 終於因洩漏眞理而犧牲了生命呢!

如今來回顧這一段史話, 畢氏學派對於這樣偉大的一個發現, 其反應竟是全然非理性的, 實在令人嘆惜莫名。一個實事求是的理性對待是: 面對不可公度性客觀存在這個事實, 承認當時基於“可公度性普遍成立”所建立的幾何基礎論的不完備性, 然後, 再去致力尋求其補救的方法。此事一直等到 Eudoxus 首創逼近法 (approximation) 才得到突破性的成功, 下面就讓我們對於 Eudoxus 這個偉大創見, 作一簡要的介紹, 其實這也就是分析學的發祥地。

逼近法與幾何基礎論的重建:現在以相似三角形爲例, 來說明 Eudoxus 當年創逼近法來完成其“補證”的基本想法, 當兩個三內角對相等的三角形中有一對對應邊的比值是一個分數 $\frac{m}{n}$ 時, 前述的證明業已證明其餘兩對對應邊的比值, 也等於 $\frac{m}{n}$。所以有待補證的情形是對應邊不可公度的情形。Eudoxus 指出, 在這種情形, 對應邊的比值不但不是分數, 而且其確切意義尚有待明確。再者, 兩對不可公度的線段的兩個“比值”之間的大小或相等關係也還有待加以明確定義, 他首先提出下述比較法則:即

$$a : b > \frac{m}{n} \Longleftrightarrow na > mb;$$
$$a : b < \frac{m}{n} \Longleftrightarrow na < mb$$

再者, 他又提出下述長度的*可比性*: 對於任給兩個線段 a, c, 恆有足夠大的正整數 m 使得 $mc > a$ [不管 a 有多長, c有多短]

設 a, b 是一對給定線段, 且爲不可公度者; n 是一個任給正整數, 取 $c = \frac{1}{n}b$ 爲尺度

來丈量 a。由上述原理, 恆有一個唯一的 m 使得

$$\frac{m}{n} < a : b < \frac{m+1}{n}$$

亦即 $a:b$ 可以被夾逼在兩個差額只有 $\frac{1}{n}$ 的分數之間。當 n 無限增大時, $\frac{1}{n}$ 顯然可以小到任意地小。用現代的術語來說, 就是 $a:b$ 可以用分數去無限逼近之! 這樣也就充分地剖析了下述定義的合理性。

定義: 若對任給正整數 m, n 恆有

$$na \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} mb \Longleftrightarrow na' \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} mb'$$

(亦即兩者恆為同步)

則定義為 $a:b = a':b'$。

若存在有一對 m, n 使得 $na > mb$ 但是 $na' < mb'$; 則定義為 $a:b > a':b'$; 反之, 若有 $na < mb$ 但有 $na' > mb'$ 則定義 $a:b < a':b$。

接著, Eudoxus 就用逼近法簡潔地補足了定量幾何中原先只是對於可公度的情形具有證明的那些基本定理。現在以相似三角形定理為例, 說明他用逼近法所作的補證:

設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三內角對應相等, 而 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 是不可公度的, 我們要用上述定義來證明三對對應邊的比值是相等的, 亦即下述不等關係的同步性是對於任給正整數, m, n 恆成立的:

$$n\overline{AB} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} m\overline{A'B'}$$

$$\Leftrightarrow n\overline{AC} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} m\overline{A'C'}$$

$$\Leftrightarrow n\overline{BC} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} m\overline{B'C'}$$

茲證之如下: 若 $n\overline{AB} > m\overline{A'B'}$, 則可在線段 $\overline{AB}$ 上取 B^* 點, 使得 $n\overline{AB^*} = m\overline{A'B'}$; 過 B^* 的平行線交 $\overline{AC}$ 於 C^* 點, 則有 $\triangle AB^*C^*$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三內角對應相等。由先前業已得證的可公度的情形即得

$$\begin{aligned} \overline{AC^*} : \overline{A'C'} &= \overline{B^*C^*} : \overline{B'C'} \\ &= \overline{AB^*} : \overline{A'C'} = m/n \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &n\overline{AC} > n\overline{AC^*} = m\overline{A'C'}, \\ &n\overline{BC} > n\overline{B^*C^*} = m\overline{B'C'}。\end{aligned}$$

同理可證

$$n\overline{AB} < m\overline{A'B'} \Rightarrow n\overline{AC} < m\overline{A'C'} \text{ 和 }$$

$$n\overline{BC} < m\overline{B'C'}。$$

這也就是 Eudoxus 當年對於相似三角形在不可公度的情形的補證

不可公度性的存在對於古希臘幾何基礎論的嚴峻挑戰, 歷經半世紀, 如今不但可以用逼近法加以簡潔的證明, 逼近法還給整個數學, 開拓了廣闊的天地

古希臘的幾何學經歷這樣一段轉折, 奮鬥與創造, 才眞正脫胎換骨, 趨於成熟, 至於往後,Euclid 之成書,Archimede 對於 Eudoxus 逼近法的拓展,Appolonius 對於圓錐曲線的研究可以說是水到渠成的更上層樓。今天關於古希臘的幾何史話也就此打住, 下面且讓我們談一些近代的數學進展。

IV. 向量代數與解析幾何:

幾何學所研究的課題就是我們和宇宙萬物所在的空間的本質,宇宙間一切事物和現象都自然地蘊含著空間的性質而且也永遠就其制約! 由此可見, 幾何學當然是一切自然科學的基礎。再者, 歸根究底, 由於我們所生存的大氣層是一個高度透明, 陽光普照的環境, 所以良好的視覺是大有利於生存的一種本能。因此, 漫長的進化歷程中自然而然地賦矛我們人類以極佳的視覺與空間直覺。可以說每一位正常人都與生俱來有相當好的幾何天賦。由此可見, 幾何學成爲人類文明中的“第一科學 (Number one Scieence)” 實非偶然, 再者, 空間的本質既簡樸自然, 又博大精深的, 所以幾何學的基礎理論在古希臘時代, 業已基本完備。但是空間本質的精微之處, 例如平行性的眞諦, 困惑了幾何學家近兩千多年, 一直到十九世紀非歐幾何、微分幾何的發展, 才終於撥雲見日, 得見精微, 但是此事說來話長, 難以在此作一簡短介紹。我們今天第四個也是最後一個題材, 讓我們談一談向量代數與解析幾何。因爲它更加基本實用, 而且和前面三個題材的呼應和連貫性也多得多。

十七世紀笛卡兒和費瑪開創解析幾何學, 乃是代數學與幾何學這兩大支流會合、會師之處, 是整個數學發展史上的頭號大事, 其影響極爲深遠。而微積分的誕生則可以說是這一會師後的第一個重大產物, 從純幾何的觀點來看, 解析幾何是定量幾何順理成章的更上層樓的自然發展。因此讓我們接著上一主題, 先來分析一下解析幾何和定量幾何之間的起承關係。

古希臘和中國古算的定量幾何中, 都是以面積公式, 勾股弦 (亦即畢氏定理) 和相似比爲其基本定理而開展的。其實, 平面或空間的坐標化, 歸根究底其理論基礎也就是上述基本定理, 解析幾何中的距離公式就是畢氏定理; 直線的參數式就是相似比的一種表現等等, 概括地來說, 坐標化乃是對於全平面或全空間有系統地運用定量幾何中的基本定理 (亦即勾股與相似比), 從而把幾何的研究轉換成代數的一種框架。其實到了十九世紀中葉。Hamilton,Grassmann 開始把這種空間結構的代數化做得更加澈底, 更加精簡, 這也就是向量代數。

向量代數與空間結構的代數化:空間概念之中, 最最原始者首推“位置”,空間本身其實就是所有可能的“位置”的總體。在幾何學的討論中, 我們用點來標記一個位置。(這也就是爲什麼有些幾何書說空間乃是一個點集); 其次就是由一個位置到另一個位置之間的“通路”。光的存在使得我們體認到空間中兩點之間的“最短通路”的唯一存在性,這也就是連結兩點之間的“直線段”。這就是空間結構之中的最最基本者, 它也就是兩點之間的“位差”的具體化。直觀上一個位差具有方向和距離這樣兩個要素, 例如有人問你:“由這裡到某處應該如何走? ” 一個簡明扼要的回答就是告訴他兩處位差的方向和距離 (例如向東北五公里),位移向量 (displacement)這個基本概念也就是把方向和距離想成位差的唯二要素。而且把它想成一種帶有方向成份的代數量, 例如向東五公里, 向西五公里等等, 都是位移向量。換句話說, 所有“同向等距的有向線段”都是同一個位移向量的具體化, 而位移向量則是它們的抽象化。化另外一種確切而且生動的說法是: 一個向量就是空間

的一個平移(trauslation), 它把全空間的每一個點都做了一個同向且等距的移動。接著讓我們來分析下, 兩個平移的組合是否還是一個平移呢? 設 T_1, T_2 是兩個任給的平移, A, B 是空間任給兩點, 則有

$$\overrightarrow{AT_1(A)} \overset{//}{=} \overrightarrow{BT_1(B)},$$
$$\overrightarrow{T_1(A)T_2 \circ T_1(A)} \overset{//}{=} \overrightarrow{T_1(B)T_2 \circ T_1(B)}$$

($\overset{//}{=}$ 表示平行且等長) 是否 $\overrightarrow{AT_2 \circ T_1(A)}$ 也和 $\overrightarrow{BT_2 \circ T_1(B)}$ 平行且等長呢? 如下圖所示

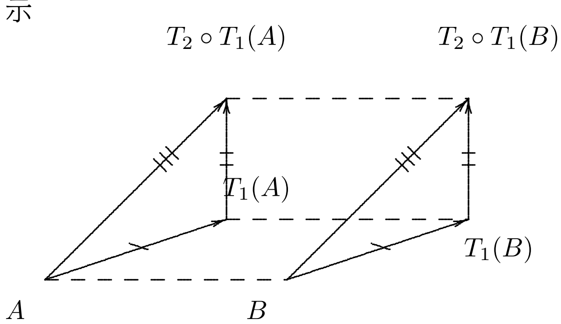

圖 六

由所設和平行四邊形的特徵性質, 即得 $\overrightarrow{AB} \overset{//}{=} \overrightarrow{T_1(A)T_1(B)} \overset{//}{=} \overrightarrow{T_2 \circ T_1(A)T_2 \circ T_1(B)}$, 因此即得 $\overrightarrow{AT_2 \circ T_1(A)} \overset{//}{=} \overrightarrow{BT_2 \circ T_1(B)}$。這也就證明了任給兩個平移 T_1, T_2 的組合 $T_2 \circ T_1$ 也必定是一個平移。再者, 同樣的平行四邊形定理也說明 $T_2 \circ T_1$ 和 $T_1 \circ T_2$ 是同一個平移。由此即可自然地引進平移之間的加法運算, 即

向量加法:$T_1 + T_2 = T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = T_2 + T_1$ 。

由向量加法的複合濃縮, 就得到向量的整數倍, 即 $n \cdot \mathbf{a}$ 乃 n 個 $\mathbf{a}$ 自相加之總和, 由此又可以逐步推廣而得一個向量的任何有理數倍的合理定義, 即

$$(-n) \cdot \mathbf{a} = -(n \cdot \mathbf{a})。$$
$$n \cdot (\frac{m}{n} \cdot \mathbf{a}) = m \cdot \mathbf{a}$$

最後, 還可以用 Eudoxus 的逼近原理, 把上向量倍積推廣到實數倍, 這樣所得的向量倍積$k \cdot a$ 的幾何描述是: 當 $k > 0$ 時, $k \cdot \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}$同向而其距離 (長度) 則是 $|\mathbf{a}|$ 的 k倍, 若 $k < 0$ 則 $k \cdot \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}$ 反向而其長度則是 $|\mathbf{a}|$ 的 $(-k)$ 倍。再者, 容易驗證向量倍積具有下列易算好用的運算律, 即

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{a}) = (k_1 \cdot k_2)\mathbf{a},$$
$$(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$$
$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

若把上述分配律 $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 作一圖解, 即可看出它就是以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}\}$ 爲其三邊的三角形和以 $\{k\mathbf{a}, k\mathbf{b}, k\mathbf{a} + k\mathbf{b}\}$ 爲其三邊的三角形互爲相似三角形的代數形式。換句話說, 上述分配律乃是原先相似三角形定理的代數化!

那麼畢氏定理的代數化又是什麼呢? 若以 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 分別表示一個直角三角形的兩個直角邊 (亦即勾與股), 則 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 表示其弦。若以 $|\mathbf{a}|$ 表示 $\mathbf{a}$ 的長度, 則勾股弦公式就可以改寫成:

“當 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 時,

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$”

在一般的情形, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 是不等長的, 它們是一個平行四邊形的兩條對角線, 我們可以把 $\mathbf{b}$ 分解成 $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, 其中 $\mathbf{b_1}$

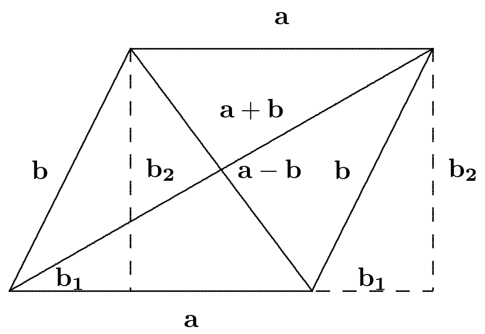

圖 七

和 $\mathbf{a}$ 同向 (或反向) 而 $\mathbf{b}_2$ 則和 $\mathbf{a}$ 垂直, 則有

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\\
=&|\mathbf{a}+\mathbf{b}_1|^2+|\mathbf{b}_2|^2\\
&+|\mathbf{a}-\mathbf{b}_1|^2+|\mathbf{b}_2|^2\\
=&(|\mathbf{a}|\pm|\mathbf{b}_1|)^2+(|\mathbf{a}|\mp|\mathbf{b}_1|)^2+|2\mathbf{b}|^2\\
=&2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b_1}|^2+2|\mathbf{b}_2|^2\\
=&2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}|^2
\end{aligned}$$

這樣, 就得出一個對於任意兩個向量皆成立的長度關係式, 即

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}|^2$$

[在 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 時, 圖六的平行四邊是個矩形, 所以 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, 上述公式就成爲勾股弦公式兩邊同乘以2。]上述公式常通叫做廣義畢氏定理, 我們還可以把它進一步推廣到對於任給三個向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 皆成立的一個公式, 即爲

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-|\mathbf{c}+\mathbf{a}|^2\\
&\quad+|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2\equiv 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

其推導如下

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2\\
=&2|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{c}|^2 &(1)\\
&|\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2\\
=&2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &(2)\\
&|\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2\\
=&2|\mathbf{a}+\mathbf{c}|^2+2|\mathbf{b}|^2 &(3)\\
&|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2\\
=&2|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{c}|^2 &(4)
\end{aligned}$$

$(1)-(2)+(3)-2\times(4)$ 即可得出公式。$(*)$ 這樣一個對於任意三個向量皆普遍成立的長度公式看起來的確是十分對稱漂亮的, 但是它究竟有什麼用處呢? 這就得略作代數變形才能充分顯現其妙用了。若把組合量 $\frac{1}{2}\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2\}=f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 看成一個定義於一對向量的函數, 則 $(*)$—式就變形成上述函數的一個簡潔有力的性質, 即 $2\cdot\{f(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c})-f(\mathbf{a},\mathbf{b})-f(\mathbf{a},\mathbf{c})\}\equiv 0$ 這也就促使我們根本改用符號 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 來表示上述組合量, 而且把它想成 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的一種乘積,(叫做 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的內積), 因爲這樣做就可以把 $(*)$—式轉變成我們所熟悉慣用的分配律這種形式,

即 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

($\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$是顯然的)

由此可見, 引用向量內積的妙處是可以把古代的勾股弦現代化成內積分配律這種簡潔、易用、有力的代數公式!

總結上面這一段討論, 我們就得到整個空間結構的全面代數化, 它包括一個基本量: 位移向量, 三種運算:加、倍積和內積,而它們滿足一套極爲簡便有力的運算律: 例如

加法交換律:$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (平行四邊形定理之代數化)

倍積分配律:$k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ (相似形定理之代數化)

內積分配律:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

(勾股弦定理之代數化)

這種結構叫做向量代數 (Vector algebra), 它是現代化的解析幾何的基礎理論, 其重要優點是它把定量幾何中的基本定理自然地轉化成簡便有力的分配律, 這樣, 韓信點兵中那種分解組合的想法又可以大展神威了!可以這麼說, 現代的向量代數乃是把中國古算中的韓信點兵和勾股弦, 出入相補統一起來的數學結構! 是幾何與代數的一種自然統一!

高維勾股定理:上面所討論的定量幾何全面代數化, 線性化的另一個重大好處是它給高維勾股定理催生。勾股弦定理是關於長度和角度的基本定理、是否也有關於面積、體積幾何量的基本定理呢? 這也就是我們所要探討的高維勾股定理。今天限於時間, 只能作一簡短的介紹如下:

在坐標解析幾何中, 勾股弦定理也就是下述距離公式, 即:

$$\overline{p_1p_2}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

其幾何意義是一條直線段的長度平方等於其在三個正交坐標軸上的垂直投影的平方和, 類似地, 空間一片平面的面積平方是否也等於它在三個 (互相垂直的) 坐標面上的垂直投影的面積的平方和呢? 其答案是肯定的, 它也就是二維勾股定理的一種初步形式, 而其簡便好用形式則下述二維有向量的內積公式。

爲了把上述一維向量的內積推廣到高維, 讓我們先對於它的幾何意義再作一分析, 當 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向或反向時, 容易看到 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \pm|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$。所以 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 就是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的有號長度的乘積, 在一般的情形, 令 $\mathbf{b}'$ 爲 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 的所在直線上的垂直投影, 則有 $\mathbf{b}=\mathbf{b}'+\mathbf{b}''$, $\mathbf{b}''\perp\mathbf{a}$ (如圖八所示)

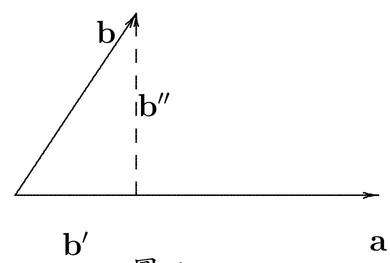

圖 八

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \mathbf{a}(\mathbf{b}'+\mathbf{b}'')\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' = \pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}'|,\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}'' &= 0。\end{aligned}$$

在二維的情形, 我們可以把一個平行四邊形想成是一種基本的二維有向量, 用符號 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 表示由兩個一維向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 所張的平行四邊形, 用 $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$表示其面積, 則不難看到 $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 滿足下列基本性質, 即

(ĩ) 對稱性: $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\tilde{A}(\mathbf{b},\mathbf{a})$

(ii) 剪應不變性 (Shearing Invariance): $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}+k\mathbf{a})=\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$

(iii) $\tilde{A}(k\mathbf{a},\mathbf{b})=|k|\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$

因爲 $\tilde{A}$ 恆取正值, 所以 ($\widetilde{\text{iii}}$) —式中的 $|k|$ 是必然的, 一如 $|k\mathbf{a}| = |k|.|\mathbf{a}|$ 但是這個“加絕對值”的等式, 往後用起來是會產生諸多不便的。所以若有可能我們得設法避免之 (即改

善之)。一個自然的出路是給平面和其上的平行四邊形都加以定向(Orientation): 若由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的轉角和平面上的“正向轉角” 同向, 則定義 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的有號面積爲正, 反之, 若兩者異向則定義 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的有號面積爲負, 亦即有號面積 $A(\mathbf{a},\mathbf{b})=\pm\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, 而 $\pm$ 號由兩者同向或異向而定, 則有

(i) 斜對稱性:$A(\mathbf{a},\mathbf{b})=-A(\mathbf{b},\mathbf{a})$

(ii) 剪應不變性:$A(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{ka})=A(\mathbf{a},\mathbf{b})$

(iii) $A(k\mathbf{a},\mathbf{b})=kA(\mathbf{a},\mathbf{b})$

將 $A(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和原先的 $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 作一比較, 驟看起來似乎互有長短: $\widetilde{\text{(i)}}$ 略勝(i) 一籌; 而 (iii) 略勝 $\widetilde{\text{(iii)}}$ 一籌。其實進一步的分析就可以由 (i)(ii) 和 (iii) 推導而得下列有號面積函數的分配律 (亦即雙線性):

(iv) $A(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c})=A(\mathbf{a},\mathbf{b})+A(\mathbf{a},\mathbf{c})$

所以 $A(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ 其實是遠優於 $\tilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的! 這也就是我們要採用有號面積的道理, 現在我們就可以用有號面積和垂直投影來同樣地定義空間中任給兩個平行四邊形 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和 $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 的 “內積”了, 先看兩者共在一平面上的情形, 這相當於一維內積時兩個有向線段共在一直線上的情形, 自然可以把兩者的內積定義爲它們的有號面積的乘積, 亦即: $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $//(\mathbf{c},\mathbf{d})$ 共面時, $//(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot//(\mathbf{c},\mathbf{d})=A(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{c},\mathbf{d})$。在一般的情形, 令 $\mathbf{c}',\mathbf{d}'$ 爲 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 在 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 所在平面上的垂直投影, 則可以仿照一維 內積的情形作下述定義: $//(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot//(\mathbf{c},\mathbf{d})=//(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot//(\mathbf{c}',\mathbf{d}')=A(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{c}',\mathbf{d}')$。

二維勾股弦定理:

$$//(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot//(\mathbf{c},\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$$

[由上述把二維內積轉換成一維內積來計算的公式, 可以看到它是對於$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ 都是線性的, 亦即滿足分配律的!

證明:先證兩者共面的情形, 令$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$是在該平面上一組正交基。由有號面積的雙線性和斜對稱性容易得出

$$A(\mathbf{a},\mathbf{b})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2\end{vmatrix},$$

$$A(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_1,\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_1\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_2,\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_2\end{vmatrix}$$

所以由上述二維內積的定義, 即有

$$\begin{aligned}&//(\mathbf{a},\mathbf{b}\cdot//(\mathbf{c},\mathbf{d})\\ =&\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2\end{vmatrix}\\ &\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_1, & \mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_1\\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_2, & \mathbf{d}\cdot\mathbf{e}_2\end{vmatrix}\\ =&\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

[上述第二個等式是一個代數恆等式, 請讀者自行驗算之]。

在一般的情形, 令$\mathbf{c}',\mathbf{d}'$ 分別是 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 在 $//(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 所在平面上的垂直投影, 則有

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}'=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}'=\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$$

再由二維內積的定義即得

$$
\begin{aligned}
& //(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot //(\mathbf{c},\mathbf{d}) \\
= & A(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot A(\mathbf{c}',\mathbf{d}') \\
= & \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}', \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}' \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}', \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}' \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

今天限於時間, 不能對於上述二維勾股弦定理以及其高維推廣作一有系統的討論。總之, 高維勾股弦定理依然是以高維內積的分配律這種極爲簡便有力的形式出現, 唯有有了它們, 高維定量幾何的基礎理論才眞正達到完善的至精至簡境界。另外一個耐人尋味的數學史上的事實是由一維勾股弦到二維勾股弦這個進程竟長達兩千餘年, 可見眞正基本而重要的進展, 是得來不易的! 而其最後, 則又是以簡便有力的內積分配律一以貫之!

分配律的威力由韓信點兵啓蒙, 一直到近代數學和量子力學, 可以說無往不利, 這種樸素的線性組合的妙用, 旣廣且深, 貫串全局, 充分地體現了基礎數學中的至精至簡。今天且以下述四句話, 給基礎數學的基本精神和進化歷程作一個還算確切的素描, 那就是:

返璞歸眞, 精益求精,

至精至簡, 以簡御繁。

我們今天的漫談也就以上面這四句話作結束吧。謝謝大家。

—本文作者任教於美國加州大學柏克萊分校數學系—