交易已明朗化、正式化了。」以實例論，筆者就讀的企業管理系，班上名列前茅者，無不有深厚數學基礎，目前是如此，將來更是如此。各位學弟妹們！不要再像我剛進校門時，面對一列列的數學課程而目瞪口呆了。

最後筆者以學生的立場懇切呼請各學科的老師、教授們，於教授一門或一章新課程時，務必先闡述其來龍去脈以及應用範圍，其次對那繁文縟節，符號充斥的數學公式務必將其來源交待清楚，不要使學生有被迫背公式的感覺，大學云：「知所先後，則近道矣。」學習數學也是如此啊！此外尙請多多闡述「爲什麼這樣？」「爲什麼那樣？」因爲許多老師認爲理該如此的問題，在學生而言卻是高深莫測。因此高明的老師往往以初學者的心境去臆測初學學生可能遭遇的困難，而加以質詢並予解說，如此要求教師也許是項奢求，但是學生卻能從中獲得莫大的收獲與滿足。各位老師，您想試試嗎？

逢甲學院企管系二年級

廖椿浤　謹上

（66年5月12日）

（10. 陳明賢來函）

編輯先生：

我們看有關智力測驗的書籍時，常可看到類似下面的項目：「有金幣九枚，其中有八枚同重的眞金幣，另一枚爲較輕的假金幣，直觀之下眞僞不可辨，今有一架準確的天平，問如何能在兩次內找出僞幣？」我們暫時稱這類問題爲「僞幣問題」。

當金幣少時，我們可以很快就得到答案，但如果金幣數目大時，麻煩就大了（其實有一種方法可行）。而做法並不是這裏所談的重點，重點是已知某一數目 a 的金幣，在不碰巧的情況下，至少須做幾次就可找出僞幣。（我們暫時稱這次數爲此金幣數目之「測量次數」，以 $C(a)$ 表示。）

經計算後得，若金幣數二個至三個時，「測量次數」爲1。而4個至9個，其「測量次數」爲2。10個至27個，「測量次數」爲3。28個至81個，其「測量次數」爲4。82個至243個，「測量次數」爲5。……

我們將上述數值列一表如下：

a	$C(a)$
$3^0+1\sim3^1$	1
$3^1+1\sim3^2$	2
$3^2+1\sim3^3$	3
$3^3+1\sim3^4$	4
$3^4+1\sim3^5$	5

a	$C(a)$
$3^5+1\sim3^6$	6
$3^6+1\sim3^7$	7
$3^7+1\sim3^8$	8
$3^8+1\sim3^9$	9
$3^9+1\sim3^{10}$	10

由上表觀察可得兩件推測：

（I）$3^{n-1}<a\leq3^n\Longleftrightarrow C(a)=n$

（II）$a\leq b\Longrightarrow C(a)\leq C(b)$

若推測成立，我們可得下列公式：

（i）若 $3^{n-1}<a<3^n\Longrightarrow C(a)=\left[\dfrac{\log a}{\log 3}\right]+1=[\log_3 a]+1$

（ii）若 $a=3^n\Longrightarrow C(a)=n$

問題：

(1)此問題以前是否有人研究過？

(2)若推測 (I), (II) 成立，其完整的證法爲何？

(3)此「測量次數」($C(a)$) 在數學上將會有別的意義（用途）嗎？

臺東高中一年和班

陳明賢　敬上

明賢同學：

這是一個極佳的歸納法觀察。事實上，有許多組合學上的問題，都是由類似的方法，先實驗，再綜合。先得到相當多的經驗，再寫成一般法則，最後才去證明。

若要證明推測 (I)，可以歸納法分別證明下面(1),(2)兩項即得：

(1) 若 $3^{n-1}<a\leq3^n$ 則稱 n 次可以從 a 枚金幣中找出較輕的一個。

【證】 $n=1$ 時，是 $a=2$、3 的情況，顯而易見爲眞。

設 $n=k$ 成立，要證 $n=k+1$ 成立。

利用除法可得

$$a=3b+r,\quad 0\leq r\leq2$$

令 $e_1,e_2,e_3=0$ 或 1，使 $e_1+e_2+e_3=r$。

再令 $a_1=b+e_1,\ a_2=b+e_2,\ a_3=b+e_3,$

則　$a=a_1+a_2+a_3$ 並可以證明

$$3^{k-1}<a_1,\ a_2,\ a_3\leq 3^k.$$

將金幣分三堆，每堆各有 a_i 枚，因 a_1, a_2, a_3 中至少有兩數相同（可設爲 a_1 及 a_2），將 a_1 枚金幣放在天平一端，a_2枚金幣放在天平另一端，稱一次，則可以決定輕的金幣是在a_1枚內，或a_2枚中，或是在a_3枚中。總之，再 k 次就可以找出它來，總共花去$k+1$次。■

(2) 若可以在n次内找出較輕的金幣，則$a\leq 3^n$.

【證】$n=1$時，只能稱一次，所以天平兩端最多只能各放一枚，剩下的最多也只能有一枚。否則，當天平兩端等重時，較輕的在剩下一堆中，就沒法找出來，於是$a\leq 3$.

設$n=k$成立，要證$n=k+1$成立。

設第一次稱的時候，天平兩端各放 b 枚金幣，剩下$a-2b$ 枚金幣未稱，則輕的一枚可能在 $b, b, a-2b$ 這三堆中任一堆，都要在k次内稱出來，所以

$$b\leq 3^k,\ b\leq 3^k,\ a-2b\leq 3^k$$

三式相加得

$$a\leq 3^{k+1}$$ ■

至於推測 (II), 很容易由（I）看出其爲眞。

如果定義 $\lceil x\rceil$ 爲大於或等於 x 的最小整數，例如 $\lceil 3\rceil=\lceil 2.1\rceil=3$（這是公營事業，如郵局、火車票、汽車票最拿手的好戲，未滿先進。）則你的公式 (i), (ii) 可以合併爲一式

$$C(a)=\lceil \log_3 a\rceil$$

（一般相對於 $\lceil x\rceil$ 也有人把 $\lfloor x\rfloor$ 寫成 $\lfloor x\rfloor$，中括號的角長在上邊的 ⌈ ⌉ 表示增加，長在下邊的 ⌊ ⌋ 表示減少。）

事實上，$\{3^n\}$ 這個數列較諸 $C(n)$ 更有用，因爲在 3^n 這個數上是一個分界，金幣不多過 3^n 個你可稱n 次找出僞幣，金幣多於 3^n 個則不能用n 次稱出來。

參考

另一類的問題和這極相似，也很有趣：

十二個金幣，其中十一枚同重，只有一枚重量不同，但是不知是較輕或較重，試問如何在三次内將這個金幣稱出來，並知道它是較重還是較輕？一般n個金幣又如何？

張鎮華　覆

（66年4月20日）