9. 多項式定值定理

陳明賢

本文作者現爲省立臺東高中高一學生

本文的目的在證明多項式定值定理（定理一）；利用它，我們可以證出有關整值多項式之定理（定理二），也可以簡化一些計算問題的解法。

【定理一】（多項式定值定理） 令 $f(x)$ 爲一實係數多項式，次數爲 n，領導係數是 a_n. 若 r 爲一整數，則

$$f(r+n)-\binom{n}{n-1}f(r+n-1)+\binom{n}{n-2}f(r+n-2)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}f(r+1)+(-1)^n f(r)$$
$$=a_n(n!).$$

【證明】：由插值法可知

$$f(x)=\frac{f(r)(x-r-1)(x-r-2)(x-r-3)\cdots(x-r-n+1)(x-r-n)}{(r-r-1)(r-r-2)(r-r-3)\cdots(r-r-n+1)(r-r-n)}$$
$$+\frac{f(r+1)(x-r)(x-r-2)(x-r-3)\cdots(x-r-n+1)(x-r-n)}{(r+1-r)(r+1-r-2)(r+1-r-3)\cdots(r+1-r-n+1)(r+1-r-n)}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{f(r+n-1)(x-r)(x-r-1)(x-r-2)\cdots(x-r-n+2)(x-r-n)}{(r+n-1-r)(r+n-1-r-1)(r+n-1-r-2)\cdots(r+n-1-r-n+2)(r+n-1-r-n)}$$
$$+\frac{f(r+n)(x-r)(x-r-1)(x-r-2)\cdots(x-r-n+1)}{(r+n-r)(r+n-r-1)(r+n-r-2)\cdots(r+n-r-n+1)}$$

而 $f(x)$ 的領導係數爲 a_n，故比較係數並化簡後得

$$(-1)^n\frac{f(r)}{n!}+(-1)^{n-1}\frac{f(r+1)}{1!(n-1)!}+(-1)^{n-2}\frac{f(r+2)}{2!(n-2)!}\cdots\cdots-\frac{f(r+n-1)}{(n-1)!\,1!}+\frac{f(r+n)}{n!}=a_n$$

兩邊同乘 $n!$ 並調整順序得

$$f(r+n)-\frac{n!}{1!(n-1!)}f(r+n-1)+\frac{n!}{2!(n-2)!}f(r+n-2)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{1!(n-1)!}f(r+1)$$
$$+(-1)^n f(r)=a_n(n!)$$

所以，定理由此得證。

由於這個定理只要是以 $n+1$ 個連續整數代入，其值永遠一定（卽 $a_n(n!)$），故稱爲「多項式定值定理」。由下面這個例題可知此定理能簡化計算。

【例題】：已知多項式 $f(x)$ 次數爲 4，領導係數爲 1，$f(1)=0$, $f(2)=6$, $f(3)=56$, $f(5)=552$, 求 $f(4)=?$

【解一】：以「多項式定值定理」解，可知

$$f(5)-4f(4)+6f(3)-4f(2)+f(1)=24$$
$$552-4f(4)+6\times56-4\times6+0=24$$

故 $$f(4)=210$$

【解二】：以「插值法」解，可知

$$f(x)=\frac{6(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}+\frac{56(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}$$
$$+\frac{f(4)(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}+\frac{552(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

因領導係數爲1，故

$$-\frac{6}{6}+\frac{56}{4}-\frac{f(4)}{6}+\frac{552}{24}=1$$

於是

$$f(4)=210$$

【解三】：以一般解法解，可設

$$f(x)=(x-1)(x^3+ax^2+bx+c)$$

（因 $f(1)=0$），於是

$$f(2)=4a+2b+c+8=6 \qquad (1)$$

$$f(3)=18a+6b+2c+54=56 \qquad (2)$$

$$f(5)=100a+20b+4c+500=552 \qquad (3)$$

解聯立方程式(1)，(2)，(3)，得

$$a=1,\quad b=-2,\quad c=-2$$

即

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2-2x-2)=x^4-3x^2+2$$

故

$$f(4)=(4)^4-3(4)^2+2=210$$

利用多項式定值定理，可以證明一些有關整值多項式的性質。首先我們要知道整值多項式的定義是什麼。

當變數 x 爲整數時，若一多項式 $f(x)$ 的值常爲整數，則此種多項式稱爲「整值多項式」。例如:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3,\quad \frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-1$$

和一切整係數多項式都是整值多項式。

【定理二】：若一 n 次多項式，對於連續 $n+1$ 個整數，多項式值均爲整數，則此多項式必爲整值多項式。

【證明】：設此 $n+1$ 個整數爲 $m+n$，$m+n-1$，$m+n-2$，…，$m+1$，m，並令此 n 次多項式 $f(x)$ 的領導係數爲 a_n，則由多項式定值定理可知

$$a_n(n!)=f(m+n)-\binom{n}{1}f(m+n-1)+\binom{n}{2}f(m+n-2)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}f(m+1)+(-1)^nf(m)$$

故 $a_n(n!)$ 爲整數。

(1) 由多項式定值定理又可知

$$a_n(n!)=f(m+n+1)-\binom{n}{1}f(m+n)+\binom{n}{2}f(m+n-1)-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}f(m+2)+(-1)^nf(m+1)$$

故 $f(m+n+1)=a_n(n!)+\binom{n}{1}f(m+n)-\binom{n}{2}f(m+n-1)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}f(m+2)$

$$-(-1)^nf(m+1)$$

爲一整數。同法可證 $f(m+n+2)$，$f(m+n+3)$，……等皆爲整數。

(2) $a_n(n!)=f(m-1+n)-\binom{n}{n-1}f(m-1+n-1)+\binom{n}{2}f(m-1+n-2)-\cdots\cdots$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}f(m-1+1)+(-1)^nf(m-1),$$

故 $(-1)^nf(m-1)$

$$=a_n(n!)-f(m+n-1)+\binom{n}{n-1}f(m+n-2)-\binom{n}{2}f(m+n-3)+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}f(m)$$

爲一整數，即 $f(m-1)$ 爲一整數。同法可證 $f(m-2)$，$f(m-3)$，……等均爲整數。

【系】：設 $f(x)$ 爲整值多項式，其次數爲 n，領導係數爲 a_n，則 $a_n(n!)$ 必爲整數。