8. 以長除法求一元 n 次方程各根 m 方和

何志誠

本文作者現就讀於省立臺東高中

◁前言▷

高中課程中常有如下之問題出現:

「設 $x^2+7x+3=0$ 之二根為 α、β，試求 $\alpha^3+\beta^3$ 之值。」

顯然這個問題可利用根與係數的關係簡單解決，但若次數較大，如

「設 $x^3+8x^2+3x+9=0$ 之三根為 α、β、γ，求 $\alpha^7+\beta^7+\gamma^7$ 之值。」

利用根與係數關係的方法，則十分麻煩，本文要介紹另一種方法。

◁動機▷

數理課本第六册，七十五頁習題中有一題為:

「若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 為 $f(x)=0$ 之三根，則 $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-\alpha_1}+\dfrac{f(x)}{x-\alpha_2}+\dfrac{f(x)}{x-\alpha_3}$ 」

這問題的結論可改寫為

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x-\alpha_3},$$

此結果可推廣到一般的多項式。再和 $1/(x-\alpha)$ 的無窮級數展開式配合，筆者得到一種計算多項式各根 m 次方的和的辦法，請看下面說明。

◁方法解說▷

(I) $$\frac{1}{x-\alpha}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{x}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\alpha^3}{x^3}+\cdots\cdots+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}+\frac{\alpha^3}{x^4}+\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

（但上式之中，$x\neq 0$，且 $|\alpha/x|<1$ ）

(II)若 $f(x)=0$ 為 x 的一個 n 次方程式，設其根為 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$，則

$$f(x)=a\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$$

其中 $a\neq 0$，$\alpha_1, \alpha_2\cdots, \alpha_n\in\mathbf{C}$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(x)=&a\cdot(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)+a\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\cdots(x-\alpha_n)\\&+a\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)\cdots(x-\alpha_n)+\cdots\cdots+a\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\\&(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_n)+a\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})\end{aligned}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha_1}+\frac{f(x)}{x-\alpha_2}+\frac{f(x)}{x-\alpha_3}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-\alpha_n}$$

$$=f(x)\cdot\left[\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}\right]$$

其中，$1/(x-\alpha_k)$之型式恰好符合 (I) 之型式。

由 (I) 中可得下列各式:

$$\frac{1}{x-\alpha_1}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha_1}{x^2}+\frac{{\alpha_1}^2}{x^3}+\cdots+\frac{{\alpha_1}^{m-1}}{x^m}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x-\alpha_2}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\frac{{\alpha_2}^2}{x^3}+\cdots+\frac{{\alpha_2}^{m-1}}{x^m}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x-\alpha_3}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\frac{{\alpha_3}^2}{x^3}+\cdots+\frac{{\alpha_3}^{m-1}}{x^m}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+)\ \frac{1}{x-\alpha_n}=\frac{1}{x}+\frac{\alpha_n}{x^2}+\frac{{\alpha_n}^2}{x^3}+\cdots+\frac{{\alpha_n}^{m-1}}{x^m}+\cdots\cdots$$

$$\sum_k\frac{1}{x-\alpha_k}=\frac{n}{x}+\frac{\Sigma\alpha_k}{x^2}+\frac{\Sigma{\alpha_k}^2}{x^3}+\cdots+\frac{\Sigma{\alpha_k}^{m-1}}{x^m}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x}+\frac{\Sigma\alpha_k}{x^2}+\frac{\Sigma{\alpha_k}^2}{x^3}+\cdots+\frac{\Sigma{\alpha_k}^{m-1}}{x^m}+\cdots$$

(III) 上式右邊各項係數可用長除法計算，過程見實例說明。其理論根據如下:

設 $f(x)=x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n$

則 $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)C_1x^{n-2}+(n-2)C_2x^{n-3}+\cdots+2C_{n-2}x+C_{n-1}$

已知當 $|x|>M=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\cdots\cdots,|\alpha_{n-1}|,|\alpha_n|\}$ 時，有

(1) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{n}{x}+\dfrac{1}{x}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{S_k}{x^k}$ （其中 $S_k={\alpha_1}^k+{\alpha_2}^k+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}^{\ k}+{\alpha_n}^k$）

設 $|y|<1/M$，以 $x=1/y$ 代回上式中，則可得:

(2) $$\frac{f'(1/y)}{f(1/y)}=\frac{n\dfrac{1}{y^{n-1}}+(n-1)C_1\dfrac{1}{y^{n-2}}+(n-2)C_2\dfrac{1}{y^{n-3}}+\cdots+C_{n-1}}{\dfrac{1}{y^n}+C_1\dfrac{1}{y^{n-1}}+C_2\dfrac{1}{y^{n-2}}+\cdots+C_{n-1}\dfrac{1}{y}+C_n}$$

$$=\frac{y[n+(n-1)C_1y+\cdots+2C_{n-2}y^{n-2}+C_{n-1}y^{n-1}]}{1+C_1y+C_2y^2+\cdots+C_{n-1}y^{n-1}+C_ny^n}=ny+\sum_{k=1}^{\infty}S_k\cdot y^{k+1}$$

假如利用長除法以 $(1+C_1y+C_2y^2+\cdots+C_{n-1}y^n+C_ny^n)$ 去除 $[n+(n-1)C_1y+(n-2)C_2y^2+\cdots+2\cdot C_{n-2}y^{n-2}+C_{n-1}y^{n-1}]$，依次求出前 $m+1$ 項的結果為 $b_0(=n)$，b_1，b_2，b_3，$\cdots$，b_m，餘式為 $R(y)$，則

(3) $$\frac{n+(n-1)C_1y+(n-2)C_2y^2+\cdots+C_{n-1}y^{n-1}}{1+C_1y+C_2y^2+\cdots+C_ny^n}=n+b_1y+\cdots+b_my^m+\frac{R(y)}{1+C_1y+\cdots+C_ny^n}$$

其中 $R(y)$ 可表示為 $y^m(r_1y+r_2y^2+\cdots+r_{n-1}y^{n-1}+r_ny^n)$，　$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 為常數。

$\dfrac{R(y)}{1+C_1y+C_2y^2+\cdots+C_ny^n}$又可展開，其結果可設為

$$\frac{R(y)}{1+C_1y+\cdots+C_ny^n}=d_1y^{m+1}+d_2y^{m+2}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}d_i\cdot y^{n+i}$$

和 (2) 比較，由冪級數的唯一性可得

$$S_1=b_1,\quad S_2=b_2,\quad S_3=b_3,\quad \cdots,\quad S_{m-1}=b_{m-1},\quad S_m=b_m$$

◁實例說明▷

設 α,β,γ 為 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 之三根，試求$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$, $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ 之値各為何?

解: 令 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$. $\therefore$ $f'(x)=3x^2-12x+11$

$$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2-12x+11}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{14}{x^3}+\frac{36}{x^4}+\frac{98}{x^{5}}+\frac{276}{x^5}+\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{rl}
 & (\alpha+\beta+\gamma)\quad (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\quad (\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) \\
 & n \qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \qquad (\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) \\
 & \uparrow \quad\ \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \\
 & 3\ +\ 6\ +\ 14\ +\ 36\ +\ 98\ +\ 276+\cdots\cdots \leftarrow \text{依此類推} \\
\hline
1-6+11-6\,\big) & 3\ -\ 12\ +\ 11 \\
 & 3\ -\ 18\ +\ 33\ -\ 18 \\
\hline
 & \quad 6\ -\ 22\ +\ 18 \\
 & \quad 6\ -\ 36\ +\ 66\ -\ 36 \\
\hline
 & \qquad 14\ -\ 48\ +\ 36 \\
 & \qquad 14\ -\ 84\ +\ 154\ -\ 84 \\
\hline
 & \qquad\quad 36\ -\ 118\ +\ 84 \\
 & \qquad\quad 36\ -\ 216\ +\ 396\ -\ 216 \\
\hline
 & \qquad\qquad 98\ -\ 312\ +\ 216 \\
 & \qquad\qquad 98\ -\ 588\ +\ 1078\ -\ 588 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 276\ -\ 862\ +\ 588
\end{array}$$

◁**通常解法**▷

由根與係數關係可得 $\alpha+\beta+\gamma=6$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=11$，$\alpha\beta\gamma=6$，

$$\therefore\ (\alpha+\beta+\gamma)=6$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=6^2-2\times 11=14$$

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]+3\alpha\beta\gamma=6\times[14-11]+3\times 6=36$$

$$\because\ x^3-6x^2+11x-6=0 \qquad \therefore\ x^4-6x^3+11x^2-6x=0$$

$$\therefore\ \alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-6\alpha=0 \qquad \text{(A)}$$

$$\beta^4-6\beta^3+11\beta^2-6\beta=0 \qquad \text{(B)}$$

$$\gamma^4-6\gamma^3+11\gamma^2-6\gamma=0 \qquad \text{(C)}$$

(A)+(B)+(C): $(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)-6(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+11(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-6(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$$\therefore\ (\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)=6\times 36-11\times 14+6\times 6=98$$

因爲 $\alpha.\beta.\gamma$ 亦爲 $x^5-6x^4-11x^3-6x^2=0$ 之根，故

$$\alpha^5-6\alpha^4+11\alpha^3-6\alpha^2=\beta^5-6\beta^4+11\beta^3-6\beta^2=\gamma^5-6\gamma^4+11\gamma^3-6\gamma^2=0$$

$$\because\ (\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)-6(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+11(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-6(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

$$\therefore\ (\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=6\times 98-11\times 36+6\times 14=276$$

◁**檢討**▷

比較實例的兩種解法，通常解法要先設法把 S_k 表爲根的一些對稱式的代數式，而用長除法則只要會四則運算就可按步就班算出答案。其實兩種方法基本上是一樣的，只不過長除法計算過程安排比較巧妙，所以比較簡明。