5.且談一筆畫和一線牽

王 進 賢

本文作者現任職於海軍官校一般科學部數學系

提起一筆畫總讓人想起它的開山祖師 Euler 及有名的七橋問題 (Königsberg Bridge Problem); Euler 證明出，在陸地上，不論從何地出發，一橋不通過兩次而想走完全部七座橋是不可能的。圖一寬線代表河流，七處間斷處代表七座橋，空白處代表陸地。

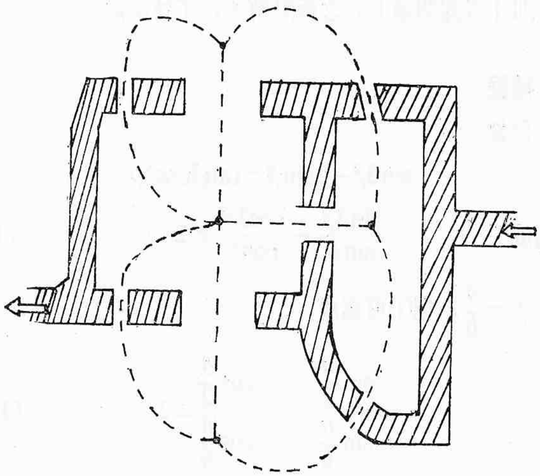

圖 一

把這個問題換成網絡來處理，就變成圖一虛線所示網絡無法一筆畫!

Euler 先生不僅處理了七橋問題，同時還給了網絡是否可以一筆畫的判準: 網絡可以一筆畫若且唯若奇頂點 (有奇數條路段以該點為端點) 的個數少於三個。

讓我們從另外一個角度來看七橋問題——不走陸路，改走水路。意思是說，圖一的問題改成: 坐船在河中行駛，一橋不穿過兩次，而想穿過所有七座橋是否可能?

很明顯地，那是辦得到的。我們把能否找尋一曲線使得其與網絡上的每一路段恰有一交點，稱為該網絡能否「一線牽」。那麼，能由水路穿過所有七座橋而不重複，換成網絡來處理，就變成圖一虛線所示網絡能一線牽!

何種網絡可一線牽? 何種不能? 一線牽和一筆畫有何種關係? 因為後面這個問題的解答替前面的問題提供了答案，因此，我們從它談起。

如果我們把網絡的每一個區域 (包括外在區域) 濃縮成一點，當兩個區域 (本身和本身亦算) 有相鄰路段就在這兩個區域的「濃縮點」間連一路段，如此由原網絡可形成一新的網絡，稱為對偶網絡。圖二實線和虛線所示二網絡互為對偶。

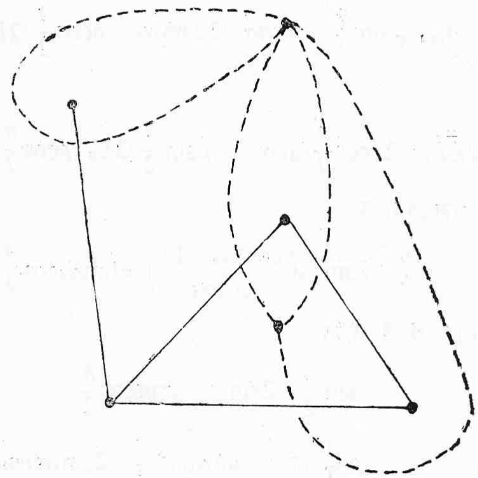

圖 二

觀察這對偶現象，我們可得到下面這個明顯的事實: 一個網絡可以一線牽若且唯若它的對偶網絡可以一筆畫! 如此，一線牽的判準就有了。

參考資料

Frank Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969 pp. 64-65, p. 113.