3.管子交叉幾次？

李國偉

本文作者現任職於本所

「數學傳播」第一卷第四期中，簡蒼調先生「談觀察歸納法之價值」文內談到一個很有趣的「管線問題」：「若有 n 戶人家，有 e 種能源，現在每戶人家都要接上這 e 種能源，請問所接的管線最少要交叉幾次？」簡先生把最少交叉數定為 n 與 e 的函數 $F(n, e)$，然後利用巧妙的歸納與觀察，證明了

$$F(n,e)=\frac{1}{16}\left\{n(n-2)+\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\right\}\cdot\left\{e(e-2)+\frac{1}{2}(1-(-1)^e)\right\}.$$

假如我們用〔x〕表示小於或等於 x 的最大整數，則上式可以很精簡的寫為

$$F(n,e)=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{e}{2}\right]\left[\frac{e-1}{2}\right] \qquad (*)$$

簡先生的歸納基本上是依據該文中圖八的鋪設法，那個方法雖然經濟，但它本身並未保證是最省交叉數的鋪設法。因此**簡先生所證明的其實不是等式（*），而是 $F(n, e)$ 小於或等於（*）的右邊。**

事實上誤以為（*）成立是一個有名的錯誤。最早提出「管線問題」的是數學家 Turán，他的問法可稱為「磚廠問題」：現有 n 個磚窯，e 個裝運站，準備築小鐵軌連接磚窯與裝運站，但是每當煤車通過小鐵軌相交叉的地方，就會震下來一些磚塊，那麼要節省磚塊該如何減少小鐵軌的交叉數？最少可減到多少？一九五二年他分別在波蘭的兩所大學裏提到這個問題，結果在一九五三年 K. Zarankiewicz 與 K. Urbanik 分別找到了「答案」，也就是（*）中的結果。直到一九六五與一九六六，P. Kainen 與 G. Ringel 分別找出他們論證中的漏洞，**因此「管線問題」再度懸疑。**目前以我個人所知的情形，（*）當 $\min\{n, e\}\leq 6$ 時是正確的，由別的方法可知 $F(7, 7)$ 是 77, 79, 81 三者中的一個，但是是那一個仍然未定。

如果讀者對「管線問題」有進一步的興趣，不妨先看看 R. K. Guy: *Crossing Numbers of Graphs*, in Graph Theory and Applications, Lecture Notes 303, Springer Verlag, 那裏面列有不少有關的文獻。

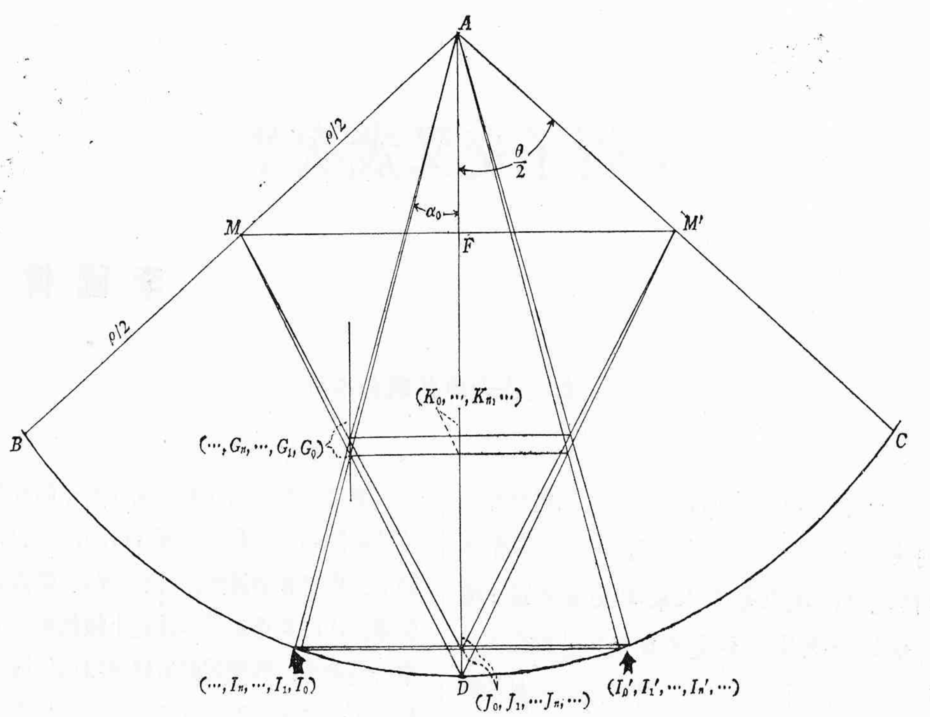
4.三等分一任意角之極限解法

蔡昌明

本文作者原習化工，目前正從事經商。

一、前言:

在古典的平面幾何學中，要三等分一任意角有如此的規定：「**必須用圓規直尺在有限次之作圖中求得其解。**」在此條件下，已被證明為不可能，但不限制此條件則可作圖。本文即以極限的觀念來解，亦不失為有趣的問題。



二、作圖法: (參看上圖)

1. 作一任意角 θ, 取自 $0<\theta<\pi$, 並平分之。以頂點 A 爲圓心, ρ 爲半徑畫弧交 θ 角之兩邊及平分線於 B, C, D。
2. 因 AD 爲角 θ 之平分線, 其兩邊對稱, 擇其一邊作圖之。
3. 連接 $\overline{AB}$ 之中點 M 於 D。
4. 過 A 點及 $\overline{MD}$ 之中點 G_0 畫直線交圓弧於 I_0 並通過 I_0 作 $\overline{AD}$ 之垂線交 $\overline{AD}$ 於 J_0。
5. 連 J_0M 與通過 G_0 平行於 $\overline{AD}$ 之線 G_0X 交於 G_1。
6. 連 AG_1 交圓弧於 I_1 並過 I_1 作 $\overline{AD}$ 之垂線, 交 $\overline{AD}$ 於 J_1。
7. 今可用遞廻 (reccursive) 方法來找 $\{G_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$, $\{K_n\}$. 若已找得 $\{G_0, G_1, \cdots, G_k\}$, $\{I_0, I_1, \cdots, I_k\}$, $\{J_0, J_1\cdots, J_k\}$, $\{K_0, K_1, \cdots, K_k\}$; ($K_k$ 爲通過 G_k 點垂直於 $\overline{AD}$ 之交點) 令 MJ_k 與 G_0X 相交於 G_{k+1}, AG_{k+1} 與 $\overset{\frown}{BD}$ 相交於 I_{k+1}, K_{k+1} 爲通過 G_{k+1} 垂直於 $\overline{AD}$ 之交點。至於 I'_{k+1}, G'_{k+1} 分別爲 I_{k+1}, G_{k+1} 對於軸 AD 之對稱點。
8. AI_n 之極限卽爲所求之三等分線。

三、證明:

設 $\angle I_0AD=\alpha_0$, $\angle I_1AD=\alpha_1=\alpha_0+\delta_1=\alpha_0+\angle I_0AI_1$

卽
$$\alpha_{k+1}=\alpha_k+\delta_{k+1} \tag{1}$$

由作圖知

$$\overline{G_0G_{k+1}}=\frac{1}{2}\overline{DJ_k}=\overline{K_0K_{k+1}}=\frac{\rho}{2}(1-\cos\alpha_k) \tag{2}$$

設 $L_0=\overline{AK_0}$

$$\begin{aligned}
&=\overline{AF}+\frac{1}{2}\overline{DF}\\
&=\frac{\rho}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{\rho}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&=\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
L_1&=L_0-\overline{K_0K_1}\\
&=L_0-\frac{1}{2}\overline{DJ_0}\\
&=\frac{\rho}{2}\cos\alpha_0+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{4}$$

$\vdots$

$$L_{k+1}=\frac{\rho}{2}\cos\alpha_k+\frac{\rho}{4}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

但 $\cos\alpha_0=\overline{AK_0}/(\overline{AK_0}^2+\overline{K_0G_0}^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$=L_0/\sqrt{L_0^2+C^2} \tag{6}$$

$\vdots$

$$\cos\alpha_k=L_k/\sqrt{L_k^2+C^2} \tag{7}$$

(令 $\overline{G_0K_0}=\cdots=\overline{G_kK_k}=C=$ 定數)

利用(5)及(7)，$L_k > L_{k+1}$ 及數學歸納法，可得 $\{L_n\}$ 爲一遞減序列，故極限存在；又由(7)知 $\{\alpha_k\}$ 之極限亦存在，稱其爲 α，即

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha \tag{8}$$

在 $\triangle AI_nJ_n$ 中

$$\overline{AK}_n/2\overline{K_nG}_n=\overline{AJ}_n/2\overline{I_nJ}_n=\overline{AE}/2\overline{EP}_n \tag{9}$$

(9)式中 E 爲 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 之交點，$\{P_n\}$ 爲 $\overline{BC}$ 與 $\{AI_n\}$ 之交點。

(9)式寫成下式

$$L_n/\frac{\rho}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\rho\cos\alpha_n/2\rho\sin\alpha_n=\rho\cos\frac{\theta}{2}/2\overline{EP}_n$$

即

$$2\overline{EP}_n=2\rho\cos\frac{\theta}{2}\tan\alpha_n=\left(\rho\sin\frac{\theta}{2}/2L_n\right)\rho\cos\frac{\theta}{2} \tag{10}$$

由(5)及(10)可得

$$\sin\frac{\theta}{2}-2\sin\alpha_n\left(\frac{\cos(\alpha_n-1)}{\cos\alpha_n}\right)=\tan\alpha_n\cos\frac{\theta}{2} \tag{11}$$

由(11)及(8)式知

$$\sin\frac{\theta}{2}-2\sin\alpha=\tan\alpha\cos\frac{\theta}{2} \tag{12}$$

即 $$\sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\alpha\cos\alpha$$

或 $$\sin\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)=\sin 2\alpha$$

又 $$\because\ 0<\theta<\pi,\ 0<\alpha<\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\theta}{2}-\alpha=2\alpha$$

即 $$2\alpha=\frac{\theta}{3} \tag{13}$$

(13)式即爲吾人所求之極限法三等分角。

四、後語:

1. 以上乃是敝人民國57年在校時完成的，所引用的極限觀念尚需各位讀者提示。
2. 敝人利用三分角之極限法尚求得

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \sin\frac{180}{3^n}=\pi$$

讀者可用上式及拋物線求得一圓面積等於正方形面積（即「方圓問題」）之極限解法，不妨試試。

3. 補註:

吾人已知

$$\sin3\beta-2\sin\beta=\tan\beta\cos3\beta$$

或寫成 $$\frac{\sin3\beta}{\sin\beta}-\frac{\cos3\beta}{\cos\beta}=2 \tag{1}$$

令 $\beta=\frac{\theta}{6}$，則(1)可寫成

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{6}}-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{6}}=2 \tag{1'}$$

由圖，在自 D 點向 AB 作垂線交於 Q 後，吾人可知 (1′) 所表示的關係。

設 $\overline{DQ}=\rho\sin(\theta/2)=b$ ……………已知

$\overline{AQ}=\rho\cos(\theta/2)=a$ ……………已知

$\overline{I_nJ}_n=\rho\sin(\theta/6)=x$

$\overline{AJ}_n=\rho\cos(\theta/6)=y$

則 $$x^2+y^2=a^2+b^2 \tag{2}$$

由 (1′) 得 $$\frac{b}{x}-\frac{a}{y}=2 \tag{3}$$

由(2)、(3)吾人消掉 x 或 y，則可求 y 或 x 之四次方程式之根。現在讀者可依據楊氏之四次方程式解法解得 x 及 y 之一組解。即 α_n 爲 $\theta/6$ 之解。

若 x, y 之一組解爲可得，則古典法之三等分一任意角是可解還不可解?

5.且談一筆畫和一線牽

王 進 賢

本文作者現任職於海軍官校一般科學部數學系