3.管子交叉幾次？

李 國 偉

本文作者現任職於本所

「數學傳播」第一卷第四期中，簡蒼調先生「談觀察歸納法之價值」文內談到一個很有趣的「管線問題」：「**若有 n 戶人家，有 e 種能源，現在每戶人家都要接上這 e 種能源，請問所接的管線最少要交叉幾次？**」簡先生把最少交叉數定為 n 與 e 的函數 $F(n,e)$，然後利用巧妙的歸納與觀察，證明了

$$F(n,e)=\frac{1}{16}\left\{n(n-2)+\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\right\}\cdot\left\{e(e-2)+\frac{1}{2}(1-(-1)^e)\right\}.$$

假如我們用〔x〕表示小於或等於 x 的最大整數，則上式可以很精簡的寫為

$$F(n,e)=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{e}{2}\right]\left[\frac{e-1}{2}\right] \qquad (*)$$

簡先生的歸納基本上是依據該文中圖八的鋪設法，那個方法雖然經濟，但它本身並未保證是最省交叉數的鋪設法。因此**簡先生所證明的其實不是等式（＊），而是 $F(n,e)$ 小於或等於（＊）的右邊。**

事實上誤以為（＊）成立是一個有名的錯誤。最早提出「管線問題」的是數學家 Turán，他的問法可稱為「磚廠問題」：現有 n 個磚窯，e 個裝運站，準備築小鐵軌連接磚窯與裝運站，但是每當煤車通過小鐵軌相交叉的地方，就會震下來一些磚塊，那麼要節省磚塊該如何減少小鐵軌的交叉數？最少可減到多少？一九五二年他分別在波蘭的兩所大學裏提到這個問題，結果在一九五三年 K. Zarankiewicz 與 K. Urbanik 分別找到了「答案」，也就是（＊）中的結果。直到一九六五與一九六六，P. Kainen 與 G. Ringel 分別找出他們論證中的漏洞，**因此「管線問題」再度懸疑。**目前以我個人所知的情形，（＊）當 $\min\{n,e\}\leq 6$ 時是正確的，由別的方法可知 $F(7,7)$ 是 77, 79, 81 三者中的一個，但是是那一個仍然未定。

如果讀者對「管線問題」有進一步的興趣，不妨先看看 R. K. Guy: *Crossing Numbers of Graphs*, in Graph Theory and Applications, Lecture Notes 303, Springer Verlag，那裏面列有不少有關的文獻。