2.談數學教具之設計

翁 義 聰

數學教育在定義、定理、證明的程式下，很少同學能够衝破形式而生動的思考問題。本文粗糙的談及數學教具，或可供關心數學教育的朋友參考。

作者就讀於高雄師範學院數學系四年級。

——編者按

一位數學專業者，在從事演講、討論、教學時，若他所面對的是一羣各名中學的佼佼者，甚或更高學府的學子，他們無分男女皆是反應靈敏、思路貫通無阻，那麼無論他講的是趣味濃郁的數學史，或全部爲普徧方法與理論的數學，都是很容易被吸收、接受、運用的。但若他所面對的是一些在校數學成績祇有四、五十分的同學，那他們能有多少心得？恐怕祇有那些直接給他們授課的老師心裏明白了。這些學生平日在課堂上，望着黑板冗長的證明過程及一般化的例題，已是茫茫然不明究竟，做習題時又不知從何下手；消化課本的內容已是一大困難，又怎敢奢言活用。如果教材捨棄「設計」的實際問題，對那羣數學「天份」不高的同學，豈非置他們於不顧？

在拓樸學中著名的 Möbius 圈，它的代表參數式：

$$f(t)=f(x,y)=((2+x\sin(y/2))\cos y,$$
$$(2+x\sin(y/2))\sin y,\ x\cos(y/2)),$$

其中　$(x,y)\in(-1,1)\times[0,2\pi]$

是衆所周知，但有多少讀者曾細心的去黏出一個模型？如讓一隻螞蟻在上面沿著與邊緣平行的方向一直爬行，它終會爬回到原來的位置。但如果沿著紙圈的中間剪開，可得到扭轉更多的紙圈；再剪一次，則那隻可憐的螞蟻永遠再也不能回到原來的地方，因爲紙圈已成爲兩個互相聯串的紙圈了。

在討論平面幾何時，如果設計教具，代替了一些文字、符號的證明，對於若干的學生有很大的意義。當然所設計的模型、教具需有理可循，才能不脫嚴密的證明常軌，以下爲一套教具的設計，它包含有三個運算及一種度量方法。

1. 平行移動： 幾何圖形的形狀，大小度量方向均不改變，祇有位置改變者稱之爲平行移動，記爲“个”。

$\triangle DEF$ 若沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向平行移動得到新 $\triangle D'E'F'$，可記爲：　$\triangle DEF(个\overrightarrow{AB})\cong\triangle D'E'F'$.

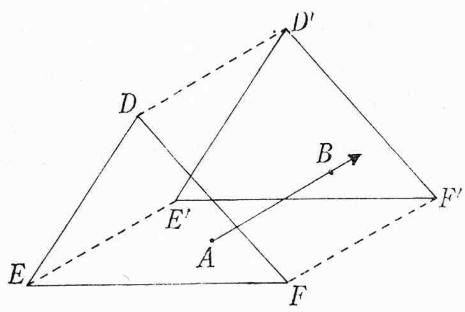
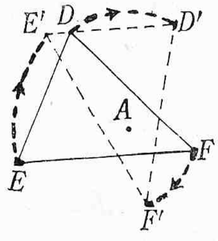


圖 1

2. 定點旋轉： 幾何圖形的形狀大小度量均不改變，祇有整個圖形在平面上繞定點旋轉，記爲“⊙”。

$\triangle DEF$ 以 A 爲定點作旋轉得一新 $\triangle D'E'F'$ 可記爲：

$$\triangle DEF(\odot A)\cong\triangle D'E'F'.$$



A 在 $\triangle DEF$ 內

圖 2

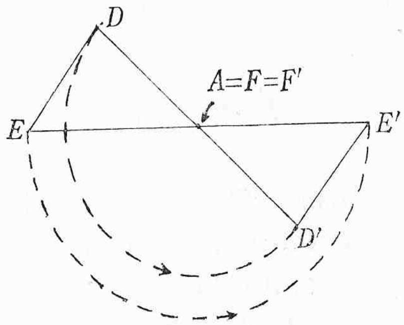


圖 3

3. 定軸翻轉： 幾何圖形繞一定軸翻轉，記爲“ϕ”。

$\triangle DEF$ 以 $\overline{AB}$ 爲軸翻轉得一新 $\triangle D'E'F'$ 可記爲：

$$\triangle DEF(\phi\overline{AB})\cong\triangle D'E'F'.$$

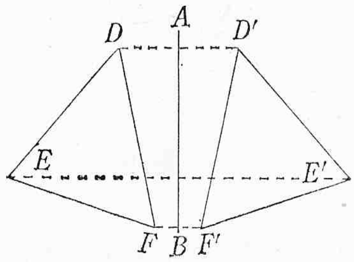


圖 4

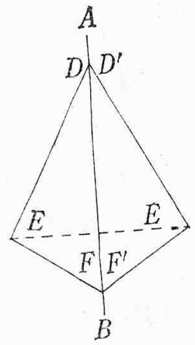


圖 5

以上三種運算，亦可視爲剛體運動加以分類而個別以函數的形態出現罷了，故可做任意的結合、交換，毫不影響其結果。

4. 等長的度量　同一圓的半徑相等，欲證明兩線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 相等祇要做圖表示即可。

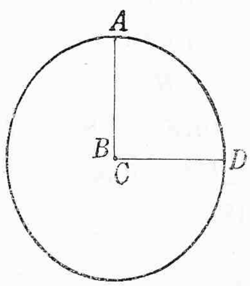


圖 6

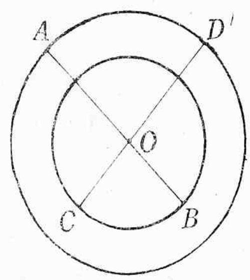


圖 7

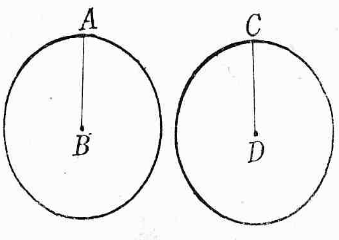


圖 8a

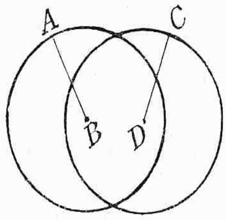


圖 8b

1. 同在一圓上，$\overline{AB}, \overline{CD}$ 皆爲半徑，所以 $\overline{AB}=\overline{CD}$.
2. $\overline{OA}=\overline{OD}, \overline{OB}=\overline{OC}$ 得 $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OD}+\overline{OC}$
   即 $\overline{AB}=\overline{CD}$.
3. 圓 B 與圓 D 之半徑相等而 A 與 C 皆在圓周上，得 $\overline{AB}=\overline{CD}$.（圖 6，圖 7 爲特例）

例一： 證明三角形內角和爲 180 度。

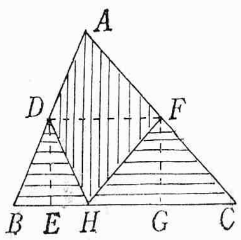


圖 9

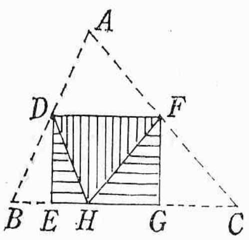


圖 10

(1)教具設計：設 $\triangle ABC$ 取 $\overline{AB}$ 中點 D, $\overline{AC}$ 中點 F, 作 $\overline{DE}\perp\overline{BC}, \overline{GF}\perp\overline{BC}$。（如圖 9）

(2)使用方法：以 $\overline{DF}, \overline{DE}, \overline{GF}$ 分別爲軸翻轉 $\triangle ADF$, $\triangle DBE, \triangle GFC$，則點 A、B、C 同聚於一點H。（如圖10）

(3)證　明：
$$\triangle ADF(\phi\overline{DF})\cong\triangle HDF$$
$$\triangle BDE(\phi\overline{DE})\cong\triangle HDE$$
$$\triangle CGF(\phi\overline{GF})\cong\triangle HGF$$
$$\angle A=\angle DAF=\angle DHF$$
$$\angle B=\angle DBE=\angle DHE$$
$$\angle C=\angle GCF=\angle GHF$$
$$\angle A+\angle B+\angle C=\angle DHF+\angle DHE+\angle GHF$$
$$=\angle EHG \text{（平角）}$$
$$=180^\circ$$

然而此證明可忽略爲什麼聚於一點 H？因教具之使用，翻轉時已經拼在一塊。亦可直接由角（翻轉），而省略三角形（翻轉）那部份。

例二： 若平行四邊形 $ABCD$ 內 $\overline{DE}//\overline{FB}$,
求證：$\triangle AED\cong\triangle CFB$.

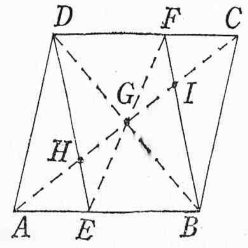


圖 11

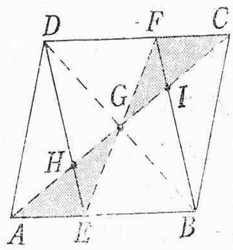


圖 12

(1)教具設計：取 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之交點G.（如圖11）

(2)使用方法：以G爲定點旋轉四邊形 $AEGD$ 到 $CFGB$ 位置完全重疊。（如圖12）

(3)證明：預備知識爲平行四邊形對角線互相平分。
$$▱AEGD(\odot G)\cong▱CFGB$$
$$\triangle DEG(\odot G)\cong\triangle BFG$$
$$(▱AEGD-\triangle DEG)\cong(▱CFGB-\triangle BFG)$$
即 $$\triangle AED\cong\triangle CFB$$

如圖12，亦可利用 $\triangle AEG(\odot G)\cong\triangle CFG$　(1)
$\triangle HEG(\odot G)\cong\triangle IFG$　(2)

(1)−(2)得 $(\triangle AEG-\triangle HEG)\cong(\triangle CFG-\triangle IFG)$
$\triangle AEH\cong\triangle CFI$　(3)

同理　$\triangle AHD\cong\triangle CIB$　(4)

(3)+(4)得 $(\triangle AEH+\triangle AHD)\cong(\triangle CFI+\triangle CIB)$
$\therefore\ \triangle AED\cong\triangle CFB$，證明完畢。

這些證明需配合教具使用才不失其意義，諸如其他的定理亦可作成教具——如畢氏定理引用面積概念亦可獲得「嚴密的證明」。

教具、模型等並非用來取代「正常的」敎學，而可印成小册或課本的附錄，供學生本身參看；或印在教師手册內提供教師輔導那些祇有「一點點」數學細胞的同學。我們應時時提醒自己，不要爲了推行普遍化的理論，而忽略挽救那些考試時挨宰的「可憐蟲」。利用教具、模型等方法幫助「思路障礙者」，亦可說是功德無量。