1976年美國高中數學競試試題

李國偉 譯

以下是 The Fifth U. S. A. Mathematical Olympiad——May 4, 1976 的試題，關於這項競試的介紹及這次題目的原文，請參看本年的美國數學月刊 (American Mathematical Monthly) 三月號 p. 185—p. 188.

1. (a) 用黑色與白色塗 4×7 棋盤的方塊（如圖一），試證明**無論何種塗法**，總有一個由棋盤的水平與垂直線形成的矩形，它的四個相異頂角的方塊都具有相同的顏色（如圖中畫粗線的矩形）。

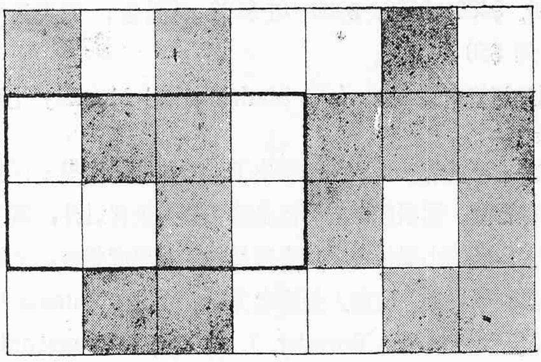

圖 一

(b) 試用黑白二色塗 4×6 棋盤的方塊，使得任一如 (a) 中所描述的矩形，它的四個相異頂角的方塊，不會是著同一顏色。

2. 令 A, B 為圓周上任意的兩個固定點，XY 是一根可轉動的直徑，試求線段 AX 與 BY 交點的軌跡。

3. 試求 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 的所有整數解。

4. 若三直角四面體 $PABC$（即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$）六根稜邊長的和為定值 S，試求 $PABC$ 可有的最大體積。

5. 若 $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ 為多項式，且

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),$$

試證 $x-1$ 為 $P(x)$ 的因式。